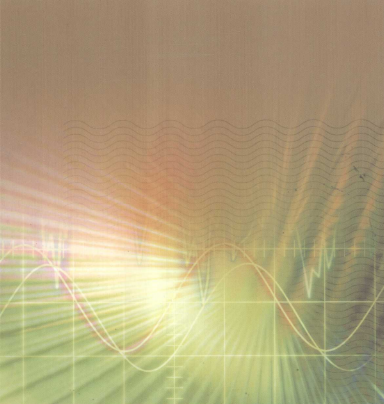
高等学校教材

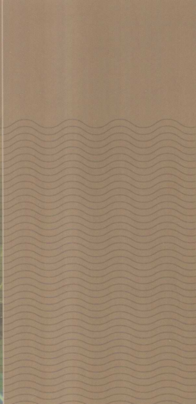
MATHEMATICS

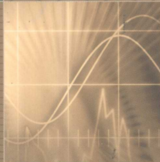
线性代数与空间解析几何

邢 伟 李建华 樊复生 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS







查询其他教学用书，敬请浏览
www.hep-st.com.cn

ISBN 7-04-016704-2

定价 14. 60 元

高等学校教材

线性代数与空间解析几何

邢　伟　李建华　樊复生　编

高等教育出版社

内容提要

本书主要介绍线性代数，最后一章介绍空间解析几何，共 8 章，内容包括：行列式、矩阵、向量线性关系及矩阵的秩、线性方程组、线性空间与线性变换、矩阵的特征值与特征向量、二次型、空间解析几何等。每章后配有 A，B 两套习题，其中习题 A 作一般要求之用，习题 B 难度增加，作补充要求之用。绝大多数习题书后都给出了答案或提示，以便于读者自学与复习。

全书内容系统、丰富、精练，突出了知识的模块化结构编排，可读性强。书中不乏作者自己的独到创意。本书既可作线性代数课程的教材，又可作空间解析几何课程的教材，也可两者兼顾。

本书可供高等院校非数学类各专业使用，亦可供广大科技工作者或者有兴趣的读者阅读与参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与空间解析几何/邢伟，李建华，樊复生编.
北京：高等教育出版社，2005.6（2006 重印）
ISBN 7-04-016704-2

Ⅰ.线… Ⅱ.①邢…②李…③樊… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②空间几何：解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 036720 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2005 年 6 月第 1 版
印　　张	13.5	印　　次	2006 年 4 月第 2 次印刷
字　　数	240 000	定　　价	14.60 元

物料号 16704-00

前　言

对于日益呈现出高技术化（通常表现为数字化）社会的今天，线性代数是一门应用最为广泛的大学数学课程。

线性代数内容丰富，自成体系，比较抽象。空间解析几何是以线性代数为工具建立起来的，具体直观，同时也为线性代数提供了一个“可视”背景。本书主要介绍线性代数的基本理论与方法，最后一章介绍空间解析几何。如此安排的目的之一是为了给读者一个更大的学习、思考空间：在单纯学习线性代数时，希望能够注意到它隐藏着的几何直观；在单纯学习几何时，也希望能够探究到它的代数根源。毋庸置疑，代数与几何有着天然的联系，兼容并包、相得益彰有利于数学思想的升华。

考虑到目前大学本科线性代数教学学时偏少，而学生应掌握的内容又偏多的特点，我们在内容的安排上力求全面、精练，注重系统性、模块化，增加易读性，使学生少走弯路地接受新知识。在学习本书时，善于运用矩阵的思想与方法处理问题，并试着理解或统一全书内容不失为一个能够融会贯通的好方法。

本书形成过程中，获得了东北大学教材计划建设立项项目（“线性代数教材建设”）及东北大学教务处的有力支持，获得了高等教育出版社高等理科分社的有力支持，借此我们表示衷心地感谢。东北大学理学院车向凯教授自始至终给予了本书多方面的帮助，孙艳蕊副教授、张秀华副教授在本书试用期间也给予了有益的建议，在此，向他们表示由衷的谢意。我们也对审稿人表示真诚谢意。

邢伟写了第一、二、三章，樊复生写了第四、五、六章，李建华写了第七、八章。由于时间较紧，尽管做了很大努力，但恐有不当、遗漏之处，恳请专家、读者批评指正或给出您的宝贵建议（联系方式 Email：awxing@mail. neu. edu. cn）。

作者
于东北大学理学院
2005 年 1 月 6 日

本书使用符号说明

符　号	意　义
$:=$	定义式
$\sum$	求和号
$\prod$	求积号
$K,K^n,K^{m\times n}$	一般的数域，数域 K 上所有 n 维列（或行）向量集（它是 K 上 n 维线性空间），数域 K 上所有 $m\times n$ 阶矩阵集（它是 K 上 $m\cdot n$ 维线性空间）
$\mathbf{R},\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^{m\times n}$	实数域，实数域 $\mathbf{R}$ 上所有 n 维列（或行）向量集（它是 $\mathbf{R}$ 上 n 维线性空间），实数域 $\mathbf{R}$ 上所有 $m\times n$ 阶矩阵集（它是 $\mathbf{R}$ 上 $m\cdot n$ 维线性空间）
$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$	n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数
$\lvert a_{ij}\rvert_n$ 或 $\lvert a_{ij}\rvert$	n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
D^{T}	行列式 D 的转置
(i,j)	行列式或矩阵的第 i 行、第 j 列位置
M_{ij}	行列式 (i,j) 位置的余子式
A_{ij}	行列式或矩阵 (i,j) 位置的代数余子式
δ_{ij}	Kronecker 符号：当 $i=j$ 时，$\delta_{ij}=1$；当 $i\neq j$ 时，$\delta_{ij}=0$
$(a_{ij})_{m\times n}$ 或 (a_{ij})	$m\times n$ 阶矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{E}$	单位矩阵
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{A}^{-1}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵
$\det(\boldsymbol{A})$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

续表

符　号	意　义
$R(\boldsymbol{A}), R\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩
$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$	矩阵经初等变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$,或矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价
$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似
$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同
$r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$	初等行(列)变换之一,互换矩阵的第 i,j 两行(列)
$k \cdot r_i (k \cdot c_i)$	初等行(列)变换之一,第 i 行(列)乘以非零常数 k
$r_i + k r_j (c_i + k c_j)$	初等行(列)变换之一,第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)
$\boldsymbol{P}[i,j]$	初等矩阵之一,单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经第 i,j 两行互换后所得
$\boldsymbol{P}[i(k)]$	初等矩阵之一,单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经第 i 行乘以非零常数 k 后所得
$\boldsymbol{P}[i+j(k)]$	初等矩阵之一,单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经第 j 行的 k 倍加到第 i 行后所得
$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$	(n 维)标准单位向量,即 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的列向量组或行向量组
$[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的数量积,又称内积
$\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角
$\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的向量积,又称外积
$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$	向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 的混合积
$\lvert \boldsymbol{\alpha} \rvert$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模
□	定理等的证明结束

目　录

第一章　行　列　式

行列式起源于线性方程组的求解问题. 早在 1693 年德国数学家 Leibniz 就使用了行列式,1750 年瑞士数学家 Cramer 建立了求解线性方程组的行列式基本公式. 今天,行列式已经是数学中的一个基本概念.

第一节　二、三阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

易知,当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,式(1.1)有惟一解:

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

这种解的表达式略显凌乱. 如果引入了二阶行列式的记号,情况就不一样了.

所谓二阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} :=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 为四个数. 上式右边的代数式也可视为左边二阶行列式的展开式:位于行列式的主对角线(从左上角到右下角的连线,即实线)上两个元 a_{11},a_{22} 的乘积取正号,位于次对角线(从右上角到左下角的连线,即虚线)上两个元 a_{12},a_{21} 的乘积取负号.

例 1.1　$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2.$

有了二阶行列式的概念,我们再来看方程组(1.1)的解的表达式. 令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

行列式 D 是由方程组(1.1)的系数构成的,称为方程组(1.1)的系数行列式. 而 $D_i(i=1,2)$是系数行列式 D 的第 i 列由方程组(1.1)的常数项列代换而

得.现在,前面关于方程组(1.1)的结论就转化为:

当方程组(1.1)的系数行列式 $D\neq 0$ 时,方程组有惟一解:$x_i=D_i/D(i=1,2)$.这个结论就是著名的 Cramer 法则(Cramer's rule).

类似地,可以引进三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{23}a_{12}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}.$$

这里 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 为数.如上所示,三阶行列式的展开式为:位于三条实连线上的三个元的乘积分别取正号,位于三条虚连线上的三个元的乘积分别取负号.

例 1.2 $\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}=90+1+20-8-5-45=53.$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.2}$$

与二元的情况一样,仍然有 Cramer 法则成立:当方程组(1.2)的系数行列式 $D\neq 0$ 时,它有惟一解:$x_i=D_i/D(i=1,2,3)$,其中 D_i 是系数行列式 D 的第 i 列由方程组(1.2)的常数项列代换而得.

二、三阶行列式的这种展开方法不妨形象地叫做"画线法".从以上的讨论看出,方程组解的表达用行列式描述是非常清晰且易于接受的.自然要问:对于四元或四元以上的线性方程组,还有没有相应的 Cramer 法则呢?回答是肯定的.但是,对于四阶或四阶以上的行列式,却没有了直观的"画线法"展开式了.为了引进一般阶的(当然也包括二、三阶)行列式定义,我们需要一个"工具"——排列.

第二节 排 列

本节所讲的排列概念是比较狭义的.

定义 1.1 由前 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 所组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

易知，所有不同的 n 级排列共有 $n!$ 个.

123456，654321，536241 是三个不同的 6 级排列，而 263521 却不是 6 级排列. 对于前三个 6 级排列，可能你的直观感受是不一样的，即后面的排列不如前面的排列看起来"顺眼". 是什么因素造成了这样不同的感觉呢？这里面有个东西在作怪，它就是"逆序".

在一个排列中，若有某两个位置上的一对数，大的排在前面，小的排在后面，则这两个位置上的数就叫做构成了一个逆序. 在一个排列中，其所构成的逆序的总和叫做该排列的逆序数. 用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数. 如 $\tau(123456)=0$，$\tau(654321)=15$，$\tau(536241)=11$.

称逆序数是偶数的排列为偶排列，逆序数是奇数的排列为奇排列.

在一个排列中，把某两个位置上的元素互换位置的变换叫做对换.

定理 1.1　对排列做一次对换改变了排列的奇偶性.

证　设

$$j_1j_2\cdots j_{k-1}j_k\cdots j_lj_{l+1}\cdots j_n \quad (l=k+r, 1\leqslant r\leqslant n-k) \tag{1.3}$$

为一个 n 级排列. 对换 j_k, j_l 后变为

$$j_1j_2\cdots j_{k-1}j_l\cdots j_kj_{l+1}\cdots j_n. \tag{1.4}$$

我们要证明，排列(1.3)与(1.4)的奇偶性正好是相反的.

先考虑特殊情况：$r=1$，即 j_k 与 j_l 相邻. 若 j_k 与前 $k-1$ 个位置和后 $n-l$ 个位置上的数构成逆序，则对换后仍构成逆序；若不构成逆序时，对换后仍不构成逆序. j_l 也如此. 但对换前，若 j_k 与 j_l 构成了逆序，则对换后就不再构成逆序了，若对换前 j_k 与 j_l 不构成逆序，则对换后就构成了. 综上，有

$$\tau(j_1j_2\cdots j_{k-1}j_lj_kj_{l+1}\cdots j_n)=\tau(j_1j_2\cdots j_{k-1}j_kj_lj_{l+1}\cdots j_n)\pm 1,$$

奇偶性改变了. 由此，相邻两个位置上的元素做对换后改变了奇偶性.

当 $r>1$ 时，将一次对换后的结果分解成一系列相邻位置上的对换来实现.

即先将 j_k 依次与其后相邻的元素做对换，做了 r 次后变为

$$j_1j_2\cdots j_{k-1}j_{k+1}j_{k+2}\cdots j_{k+r=l}j_kj_{l+1}\cdots j_n;$$

然后，再将 j_l 依次与其前面相邻的元素做对换，做了 $r-1$ 次后即变为式(1.4). 如此这般，因共做了 $2r-1$ 次相邻位置上元素的对换，故改变了原排列的奇偶性. □

推论 1　对排列做奇数次对换改变奇偶性；对排列做偶数次对换不改变奇偶性.

推论 2　在所有 n 级排列中($n>1$)，奇、偶排列的个数相等.

证　留作练习. □

推论 3　对于任意 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$，都可以经过至多 $n-1$ 次对换变为全自然序排列 $12\cdots n$，并且所做对换的次数与原排列有相同的奇偶性.

证 留作练习.

第三节 一般阶行列式的定义

n 阶($n\geqslant 1$)行列式是由 n^2 个数所构成的含有 n 行 n 列的形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的式子. 它的展开式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \qquad (1.5)$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 级排列,求和是对所有 n 级排列进行的.

有时将式(1.5)左边的行列式简记为 $|a_{ij}|_n$,其中右下角的 n 表示行列式的阶数. 下面对这个展开式来具体地分析一下.

首先,展开式(1.5)每项中的 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 是由 n 个元素的积组成的,它们的排法是第一个下标(又叫行标)按自然序排列,而第二个下标(又叫列标)是 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$. 这说明,展开式中每项是取自行列式中不同行、不同列的 n 个元素的乘积. 又展开式中的求和实际上是对列标不同的排法而进行的. 有一个 n 级排列就对应了展开式中的一项,总共有 $n!$ 个排列,因而,n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项. 每项符号的取法是由该项所对应的排列的奇偶性决定的,当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列时取正号,为奇排列时取负号. 由定理 1.1 的推论 2 知,行列式展开式中,正负号的项数一样多,同为 $n!/2$ 项.

读者不妨对三阶行列式,分别用定义式与画线法进行展开,加以领会.

例 1.3 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这是一个主对角线(即左上角到右下角这条连线)之下的元素都是 0 的行列式,这样的行列式叫做上三角(形)行列式. 下面我们来计算它的值. 由行列式展

开的定义式，有

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1j_{n-1}}a_{nj_n}. \tag{1.6}$$

由于该行列式中有许多位置是零，因而展开式中无疑将有一些项的值为零. 把这些值为零的项都去掉，余下项的和即为 D 的值. 下面开始选定可能的非零项，从确定排列着手.

j_n 可以取 $1,2,\cdots,n-1,n$ 中的任一个数，若 j_n 不取 n，则 a_{nj_n} 必取第 n 行中前 $n-1$ 个位置上的某一个元素，无论哪个，它们都是 0，从而 a_{nj_n} 所在的项也都是 0. 所以 j_n 只有取 n，这时 $a_{nj_n}=a_{nn}$.

再看 j_{n-1} 的取法. 应该看到，j_{n-1} 只能在 $1,2,\cdots,n-1$ 中取. 若 j_{n-1} 取自 $1,2,\cdots,n-2$ 中的某一个元素，则 $a_{n-1j_{n-1}}$ 就是第 $n-1$ 行中前 $n-2$ 个 0 中的一个，这时它所在的项的值也都为 0. 因而，j_{n-1} 只能取 $n-1$，这时 $a_{n-1j_{n-1}}=a_{n-1n-1}$.

这种取法归纳地进行下去，最后，j_2 只能取 2，j_1 只能取 1.

综上，在展开式(1.6)中，除了 $12\cdots n$ 这个全自然序排列之外，其他排列所对应的项都是 0，全自然序排列是偶排列，故有

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即上三角行列式的值等于主对角线元素之积.

例 1.4　考虑行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}$$

的值. 该行列式主对角线以外的元素都是零，这样的行列式称为对角(形)行列式. 由于对角形行列式本身也是上三角形的，故其值亦为主对角元素之积. 所以，$D=a_1a_2\cdots a_n$.

例 1.5　考虑行列式

$$D=\begin{vmatrix} & & & b_1 \\ & & b_2 & \\ & \iddots & & \\ b_n & & & \end{vmatrix}$$

的值. 寻找在该行列式的展开式中，可能的使所在项为非零的那些排列. 类似的分析知，只有当排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n=n(n-1)\cdots 21$ 时，其所对应于展开式中的项才可能不为零，而其他排列所对应的项都为零. 于是

$$D=(-1)^{\tau(n(n-1)(n-2)\cdots 321)}b_1b_2b_3\cdots b_{n-2}b_{n-1}b_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}b_1b_2\cdots b_n.$$

一般讲，按照定义式(1.5)直接计算行列式往往是不可能的(除非低阶或很

特殊的情况），这是因为 n 阶行列式的展开式有 $n!$ 项，而每一项又是 n 个数的乘积．这样，计算一个 n 阶行列式，仅乘法就需要做 $(n-1)n!$ 次，而 $n!$ 是个增大相当快的量．比如 $10!=3\ 628\ 800$ 已经超过 300 万了，而 $12!=479\ 001\ 600$ 已超过 4 亿．但是，10 阶或 12 阶行列式不算太高阶行列式．在许多实际问题中，我们可以有 20 阶或 200 阶以上的行列式需要计算．由此可见，按定义式计算行列式，其计算量实在是太大了！

那么，如何计算一个行列式呢？一般来讲，行列式的计算有两种主要方法：一种是化简法，即在保持阶数不变的情况下，依据行列式的性质将其化简；另一种是降阶法，即将高阶行列式的计算问题归结为低阶的情况．在具体处理行列式问题时，经常需要将这两种方法有机地结合起来加以灵活运用．以下两节，我们将分别介绍这两种方法．

第四节 行列式的性质

在行列式的展开式(1.5)中，其项 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的确定是将行指标指定为全自然序排列，而后再对列指标取自不同的 n 级排列，并根据这个 n 级排列的奇偶性确定该项的正负号．我们知道，该项中的诸因子 a_{ij} 一般是可以交换的，一旦将其现有顺序“打乱”，重新随机地排列成 $a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$ 的话（其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $k_1k_2\cdots k_n$ 是两个 n 级排列），那么能否只通过这个排列，就可以确定该项是展开式中的哪一项以及它应该带有的符号呢？要解决这样的问题并不难，只需将诸因子的次序做一些调整，使其再变回到行指标为全自然序排列的情况中．由定理 1.1 的推论 3 知，通过调整诸 $a_{i_sk_s}$，将 $i_1i_2\cdots i_n$ 经过对换变为全自然序 $12\cdots n$ 是可行的，与此同时，$k_1k_2\cdots k_n$ 也相应地作了对换，设它变为了 $j_1j_2\cdots j_n$，即

$$a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}\to a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

于是，$a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}$ 在展开式中所对应的项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

由于诸因子 $a_{i_sk_s}$ 每调整一次顺序，相应地，两个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $k_1k_2\cdots k_n$ 都同时做了一次对换．例如，若前两个因子做一次调整：

$$a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}a_{i_3k_3}\cdots a_{i_nk_n}\to a_{i_2k_2}a_{i_1k_1}a_{i_3k_3}\cdots a_{i_nk_n},$$

则相应的两个 n 级排列有如下对换：

$$i_1i_2i_3\cdots i_n\to i_2i_1i_3\cdots i_n,\ k_1k_2k_3\cdots k_n\to k_2k_1k_3\cdots k_n,$$

根据定理 1.1，在因子的次序调整过程中，式子

$$(-1)^{\tau(i_1i_2i_3\cdots i_n)+\tau(k_1k_2k_3\cdots k_n)}=(-1)^{\tau(i_2i_1i_3\cdots i_n)+\tau(k_2k_1k_3\cdots k_n)}$$

是一个不变量，即不随因子次序的调整而改变. 于是有

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n}\\
=&(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\\
=&(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},
\end{aligned}
$$

从而，行列式的展开式又可以写成如下更一般的形式

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \tag{1.7}
$$

$$= \sum\{(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{i_1k_1}a_{i_2k_2}\cdots a_{i_nk_n} \mid i_1i_2\cdots i_n \text{ 与 } k_1k_2\cdots k_n \text{ 为 } n \text{ 级排列}\},$$

等号右侧表示对集合中所有元素求和.

上式中，等号右侧的集合表面上看有 $n!\cdot n!$ 个元素，实际上只有 $n!$ 个. 另外，在这个新展开式中，行指标与列指标地位是完全平等的. 但是注意，也可以特殊化. 即无论是行指标还是列指标，任意固定其一而对另一指标取遍所有 n 级排列进行求和，那么该和式仍有 $n!$ 项，从而仍是行列式的展开式. 当将 $i_1i_2\cdots i_n$ 固定为 $12\cdots n$ 时，式(1.7)就变成了式(1.5). 从这个意义上讲，展开式(1.7)是(1.5)的推广. 当 $k_1k_2\cdots k_n$ 固定为 $12\cdots n$ 时，展开式(1.7)成为了

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1.8}
$$

这个展开式是列指标按全自然序排列而对行指标的所有 n 级排列进行求和的.

设

$$
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.
$$

称行列式 D^{T} 为 D 的转置行列式. D^{T} 可以看成是 D 的元素沿着主对角线旋转 180°所得，亦可看成是将 D 的所有行(列)按序写成所有列(行)所得(即所谓行列互换).

性质 1.1　行列式转置值不变.

证　令 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，由式(1.8)有

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这个结果正是 D 按展开式(1.5)展开的结果. □

由性质 1.1，行列式中关于行所具有的性质，列也同样具有，反之亦然. 因而，下面关于行列式的性质都将是对行叙述的，对列的情况也同样成立，以下我们就不特别指出了.

性质 1.2　行列式可以按行提取公因子，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD_1,\text{其中 } D_1=|a_{ij}|_n.$$

也就是说，如果行列式中某行有公因子 k，则可以将 k 从行列式中提取出来.

证

$$D=\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=k\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=kD_1.$$

□

推论　行列式中某一行元素全为零时，其值为零.

性质 1.3　拆行相加性，即

$$\text{第 } i \text{ 行}\rightarrow\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $1\leqslant i\leqslant n$.

证　将上面的三个行列式依次分别记为 D,D_1 和 D_2，则

$$D=\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{j_i}+c_{j_i})\cdots a_{nj_n}$$
$$=\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{j_i}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{j_i}\cdots a_{nj_n}$$
$$=D_1+D_2.$$
□

性质 1.4　行列式两行相同值为零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0\quad(1\leqslant k<l\leqslant n),$$

其中 $a_{ki}=a_{li}(i=1,2,\cdots,n)$.

证　利用展开式(1.7)的原理及定理 1.1 来证. 先将行指标固定为 $12\cdots(k-1)l(k+1)\cdots(l-1)k(l+1)\cdots n$(该排列是全自然序排列 $12\cdots n$ 之第 k 与第 l 个元素对换所得)，而后对列指标的所有不同排列求和，于是有

$$D=\sum_{j_1\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n}(-1)^{\tau(1\cdots l\cdots k\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{lj_k}\cdots a_{kj_l}\cdots a_{nj_n}$$
$$=-\sum_{j_1\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{lj_l}\cdots a_{nj_n}$$
$$=-D.$$

所以，$D=0$.
□

性质 1.5　行列式两行成比例值为零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \\ \\ \leftarrow 第\ j\ 行 \\ \\ \\ \end{matrix}=0\quad(1\leqslant i<j\leqslant n).$$

证　利用性质 1.2 和性质 1.4 即得.
□

性质 1.6　行列式某行的倍数加到另一行值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i\neq j).$$

证 利用性质 1.3 和性质 1.5 即得. □

性质 1.7 行列式两行互换值反号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i\neq j).$$

证 记上式左边的行列式为 D,右边的为 D_1,下面我们证明 $D=-D_1$.反复利用性质 1.6,有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1}+a_{j1} & -a_{i2}+a_{j2} & \cdots & -a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1}+a_{j1} & -a_{i2}+a_{j2} & \cdots & -a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=-D_1.$$ □

以上介绍了行列式的七个基本性质,它们对于计算、分析行列式是很有帮助的.理论上,只需要性质 1.6 和性质 1.7 就完全可以具体地化简行列式而求

值了.

例如,考虑计算行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

先看第 1 列中的元素.若它们都为零,由性质 1.2 的推论,$D=0$;若不都为零,则至多用一次性质 1.7 就可以将行列式中第 1 行、第 1 列(1,1)位置上的元素化为非零元,此时行列式至多改变一次符号.因而,现不妨设 $a_{11}\neq 0$,那么只要将第一行的 $\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$ 倍加到第 i 行($i=2,3,\cdots,n$),就可以将 a_{11} 下面的所有元素都化为了 0,由行列式性质 1.6,有

$$D=(-1)^{\sigma}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{2n} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix},\sigma=0 \text{ 或 } 1.$$

再看第 2 列中下 $n-1$ 个元素.若它们都为零,应用一次性质 1.6,借助于 $a_{11}\neq 0$,可以将第 2 列化为零,于是 $D=0$;若它们不都为零,与第 1 列的讨论一样,至多用一次性质 1.7,总可以使(2,2)这个位置上的元素非零,而后利用性质 1.6,将其下方的元素全化为零.这种方法继续下去,最终结果或者是 $D=0$,或者是将 D 化为了上三角形行列式,而上三角行列式的值就是主对角元素之积,从而,行列式 D 的值即可求出.

当然,鉴于性质 1.7 可以由性质 1.6 得到这一事实(见性质 1.7 的证明),我们可以更简单地认为:理论上,任一行列式的计算问题都可以由性质 1.6 解决.

但是,在具体求解行列式问题时,需要针对行列式的不同特点而采取不同的方法,需要灵活运用行列式的性质.

例 1.6　求行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}_n$$

的值.该行列式的特点是:主对角线上的元素都相等,主对角线之外的元素也都相等.从第 2 列起,将每列加到第 1 列(性质 1.6),然后再将第 1 行的(−1)倍加到其他各行(性质 1.6),有

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}_n ,$$

上式第二个行列式是上三角形的，故最后

$$D=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

例 1.7 设行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 之阶数 n 为奇数，且 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 求 D 的值.

易知，主对角线上元素 $a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$，故

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

将该行列式每行提取公因子(−1)(性质 1.2)，然后再转置(性质 1.1)有

$$D=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = -D.$$

从而，$D=0$.

第五节 展开定理

本节讨论计算行列式的降阶法.

考虑行列式的展开式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}.$$

我们知道，展开式每一项都是由取自行列式中不同行不同列的 n 个元素的乘积构成的，其中每一行都必取且只取一个元素. 这样，在 $n!$ 个项中，如果将含有因子 a_{i1} 的项合并到一起，并提取公因子 a_{i1}，将含有因子 a_{i2} 的项合并到一起，并提取公因子 a_{i2}，…，于是 D 的展开式就可以重新写成如下形式

$$D=a_{i1}B_{i1}+a_{i2}B_{i2}+\cdots+a_{in}B_{in}, \tag{1.9}$$

其中每 B_{ij} 是提取 a_{ij} 后剩下的那些项的和，因而 B_{ij} 中不再含有 D 的第 i 行的元素了. 分析知，每 B_{ij} 应该是 $(n-1)!$ 个项的和，而每项又是由 $n-1$ 个因子的积构成的，那么，B_{ij} 到底是什么呢？一旦搞清楚了这个问题，我们就可以得到一个新的行列式展开形式(1.9)了.

在行列式 D 中，选定某一个位置，如第 i 行、第 j 列位置 (i,j) 后，划掉 (i,j) 所在的行与列，剩下的 $n-1$ 个行、$n-1$ 个列元素正好构成了一个 $n-1$ 阶行列式，记为 M_{ij}，称其为行列式 D 的 (i,j) 位置的余子式(也经常称为 (i,j) 位置上的元素 a_{ij} 的余子式). 称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 (i,j) 位置的代数余子式(也经常称为 (i,j) 位置上的元素 a_{ij} 的代数余子式). 注意，M_{ij} 以及 A_{ij} 都与 a_{ij} 的值没有关系.

例 1.8 在行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&2&0&3\\1&-1&2&0\\0&1&4&-2\\3&0&5&9\end{vmatrix}$$

中，位置 $(1,2)$，$(1,4)$ 及 $(3,3)$ 的余子式分别为 $M_{12}=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&4&-2\\3&5&9\end{vmatrix}$，$M_{14}=\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&1&4\\3&0&5\end{vmatrix}$，$M_{33}=\begin{vmatrix}0&2&3\\1&-1&0\\3&0&9\end{vmatrix}$，而相应的代数余子式分别为 $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix}1&2&0\\0&4&-2\\3&5&9\end{vmatrix}$，$A_{14}=(-1)^{1+4}M_{14}=-\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&1&4\\3&0&5\end{vmatrix}$，$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=\begin{vmatrix}0&2&3\\1&-1&0\\3&0&9\end{vmatrix}$.

引理 1.2

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n-1}&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n-11}&\cdots&a_{n-1n-1}&a_{n-1n}\\0&\cdots&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n-1}\\\vdots&&\vdots\\a_{n-11}&\cdots&a_{n-1n-1}\end{vmatrix}$$

证 左边 $=\sum\limits_{j_1\cdots j_{n-1}j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_{n-1}j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{n-1j_{n-1}}a_{nj_n}$.

若 $j_n\neq n$，则必 $a_{nj_n}=0$. 当 $j_n=n$ 时，$a_{nj_n}=1$. 于是

$$\text{左边}=\sum_{j_1\cdots j_{n-1}n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_{n-1}n)}a_{1j_1}\cdots a_{n-1j_{n-1}}\cdot 1=\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1})}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1j_{n-1}}$$

$=$右边. □

现在求式(1.9)中的 B_{ij}. 在式(1.9)中,令 $a_{ij}=1, a_{ik}=0(k\neq j)$,则有

$$B_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j} & \cdots & a_{i-1n} \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

先将第 i 行与相邻的下一行(即第 $i+1$ 行)互换后,紧接着,再与其相邻下一行(即第 $i+2$ 行)互换,……,如此做下去,每一次都是与相邻下一行做互换,直到将原第 i 行变到了最后一行,而其下面的所有 $n-i$ 个行都同时向上位移了一行为止. 由于两行互换值反号,共做了 $n-i$ 次这样的互换,故有

$$B_{ij}=(-1)^{n-i}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

与行的做法相同,现将上式中的第 j 列与相邻后一列(第 $j+1$ 列)互换,然后再与相邻后一列互换,……,直到将原来的第 j 列在作了 $n-j$ 次这样相邻互换变换后,变到了第 n 列,而其后 $n-j$ 个列都同时向左移动了一列为止. 于是又有

$$B_{ij}=(-1)^{n-i}\cdot(-1)^{n-j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} & a_{i-1j} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} & a_{i+1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

注意到,在这个行列式中,由前 $n-1$ 个行与前 $n-1$ 个列的元素所构成的

$n-1$阶行列式(即左上角的 $n-1$ 阶子式)正是原行列式 D 的(i,j)位置的余子式 M_{ij},由引理 1.2,有

$$B_{ij}=(-1)^{2n-(i+j)}M_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=A_{ij},$$

即 B_{ij} 就是(i,j)位置的代数余子式. 于是我们得到了如下行列式的一个展开定理:

定理 1.3(按行展开定理)　行列式的值等于任意选定一行的元素与该行的代数余子式对应乘积和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

注意下列事实:设 $D=|a_{ij}|_n$,不妨设 $i<j$,应用定理 1.3 有

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}=0,$$

即行列式某一行的元素与另一行的代数余子式对应乘积和为零. 于是定理 1.3 可以推广为

推论 1　设行列式 $D=|a_{ij}|_n$,则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=D\cdot\delta_{ij},$$

这里 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, \text{当 } i=j \text{ 时}, \\ 0, \text{当 } i\neq j \text{ 时},\end{cases}$称为 Kronecker 符号.

以上对行的结果可以自然地对列描述如下:

推论 2　设 $D=|a_{ij}|_n$,则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=D\cdot\delta_{ij}.$$

展开定理 1.3 对于一些特殊的行列式,比如某一行含有较多的 0,确能起到简化计算的作用. 另外,利用展开定理也可以将某些相对复杂的 n 阶行列式的计算问题转化为较简单的求数列第 n 项的问题.

例 1.9　考虑例 1.8 中的行列式 D. 因为它是 4 阶的,所以不能用画线法展

开. 下面我们应用展开定理 1.3 将行列式 D 按第 1 行展开

$$D=\begin{vmatrix}0&2&0&3\\1&-1&2&0\\0&1&4&-2\\3&0&5&9\end{vmatrix}=2A_{12}+3A_{14}=-2\begin{vmatrix}1&2&0\\0&4&-2\\3&5&9\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&1&4\\3&0&5\end{vmatrix}=-29.$$

例 1.10 设 n 阶行列式为

$$D_n=\begin{vmatrix}2&1&&&\\1&2&1&&\\&1&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&2&1\\&&&1&2\end{vmatrix}_n.$$

该行列式主对角线上的元素全为 2,沿主对角线上、下两条斜线上的元素全是 1,其余位置上的元素都是 0. 将 D_n 按第 1 行展开,有

$$D_n=2\cdot M_{11}-1\cdot M_{12}.$$

注意到 $M_{11}=D_{n-1}$,如果再将 M_{12} 按第 1 列展开后立即有 $M_{12}=D_{n-2}$. 于是我们得到了一个递推公式

$$D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}.$$

现在,我们转而考虑数列$\{D_n\}$. 由 $D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}$ 可知,该数列是一个等差数列,公差为 $D_2-D_1=3-2=1$,首项为 $D_1=2$,从而第 n 项 $D_n=n+1$. 该题的求解过程是有趣的,它将行列式的计算划归为了简单的数列项的计算.

例 1.11 证明 Vandermonde 行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

证 应用数学归纳法,对阶数 n 归纳.

当 $n=2$ 时,$D_2=\begin{vmatrix}1&1\\a_1&a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1$,结论成立. 现假设结论对 $n-1$ 阶的 Vandermonde 行列式成立,我们再来看 n 阶的情况.

从第 n 行作起,每行都减去相邻上一行的 a_1 倍,直至作到第 2 行减去第 1 行的 a_1 倍为止,共对 D_n 作了 $n-1$ 次这种变换. 利用行列式的性质、展开定理及归纳假设,有

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1\\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \cdots & a_n^2-a_1a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n\\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

定理 1.3 是按一行展开的展开定理,能否按若干个行展开呢?答案是肯定的,这就是下面将要简单介绍的 Laplace 展开定理.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

在行列式 D 中取定 k 个行:第 i_1,第 i_2,…,第 i_k 行($1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$);再取定 k 个列:第 j_1,第 j_2,…,第 j_k 列($1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n$). 位于这些取定的行、列交叉点上的元素共有 k^2 个,保持它们彼此之间相互位置关系不变而构成的一个 k 阶行列式记为 N,该行列式称为 D 的一个 k 阶子式. 行列式 D 中去掉刚刚取定的 k 个行及 k 个列,余下的 $n-k$ 个行与 $n-k$ 个列上的元素保持彼此相互位置关系不变而构成的 $n-k$ 阶行列式 M 叫做 N 的余子式,而 $A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M$称为 N 的代数余子式.

例 1.12 设行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 0 & -1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 3\end{vmatrix},$$

则由第 1,3 两行构成的所有二阶子式共有 6 个,分别为

$$N_1=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix},N_2=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix},N_3=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 4\end{vmatrix},$$

$$N_4=\begin{vmatrix}2&3\\-1&0\end{vmatrix},N_5=\begin{vmatrix}2&4\\-1&4\end{vmatrix},N_6=\begin{vmatrix}3&4\\0&4\end{vmatrix},$$

它们对应的代数余子式分别为

$$A_1=(-1)^{(1+3)+(1+2)}\begin{vmatrix}7&8\\0&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}7&8\\0&3\end{vmatrix},A_2=(-1)^{(1+3)+(1+3)}\begin{vmatrix}6&8\\1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&8\\1&3\end{vmatrix},$$

$$A_3=(-1)^{(1+3)+(1+4)}\begin{vmatrix}6&7\\1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}6&7\\1&0\end{vmatrix},A_4=(-1)^{(1+3)+(2+3)}\begin{vmatrix}5&8\\0&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5&8\\0&3\end{vmatrix},$$

$$A_5=(-1)^{(1+3)+(2+4)}\begin{vmatrix}5&7\\0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&7\\0&0\end{vmatrix},A_6=(-1)^{(1+3)+(3+4)}\begin{vmatrix}5&6\\0&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5&6\\0&1\end{vmatrix}.$$

定理 1.4(Laplace 展开定理) 若在 n 阶行列式 D 中选定 k 个行($1\leqslant k<n$),则行列式 D 的值等于由这 k 个行产生的所有 k 阶子式与它们相应的代数余子式对应乘积和.

n 阶行列式中取定 k 个行后,由这 k 个行构成的所有 k 阶子式应该有 $C_n^k=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}$个. 那么,$n$ 阶行列式按 Laplace 展开就应该有$\frac{n!}{k!\ (n-k)!}$项. 而当 $k=1$ 或 $k=n-1$时,其展开式有 n 项,此时就是定理 1.3 的按一行展开的情况,故 Laplace 展开定理是定理 1.3 的推广.

例 1.13 现在用 Laplace 展开定理计算例 1.12 中的行列式,仍然按第 1,3 行展开,有

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\0&-1&0&4\\0&1&0&3\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{6}N_iA_i=-56.$$

当然,如果按第 3,4 行展开,计算量可以减小:

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\0&-1&0&4\\0&1&0&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&4\\1&3\end{vmatrix}\times(-1)^{(3+4)+(2+4)}\begin{vmatrix}1&3\\5&7\end{vmatrix}=-56.$$

例 1.14 证明行列式的乘法公式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{vmatrix},$$

其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$.

证 将上面三个行列式分别记为 D_1,D_2,D_3. 考虑如下行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

由 Laplace 展开定理，有 $D=D_1D_2$.

现对 D 做如下变换：先将第 $n+1,n+2,\cdots,n+n$ 行分别乘以 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}$ 后加到第 1 行，然后再将第 $n+1,n+2,\cdots,n+n$ 行分别乘以 $a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}$ 后加到第 2 行，……，如此下去，最后将第 $n+1,n+2,\cdots,n+n$ 行分别乘以 $a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn}$ 后加到第 n 行. 由性质 1.6 知，行列式的值不变，于是有

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

将其按前 n 行展开，有

$$\begin{aligned} D &= D_3\cdot(-1)^{1+2+\cdots+n+n+1+\cdots+2n}\begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix} \\ &= D_3\cdot(-1)^{\frac{2n(2n+1)}{2}}\cdot(-1)^n \\ &= D_3. \end{aligned}$$

第六节 Cramer 法则

在本章之初，我们就介绍了关于二、三元线性方程组的 Cramer 法则，本节

将给出一般元线性方程组的 Cramer 法则.

设 n 元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{1.10}$$

则其系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

若将系数行列式 D 中的第 i 列去掉换成方程组的常数项列 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，就得到了一个新的行列式记为 D_i. 显然有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\cdots,$$

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

定理 1.5(Cramer 法则) 若线性方程组(1.10)的系数行列式 $D\neq 0$，则该方程组有惟一解：

$$x_i=D_i/D \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

证 此定理的证明需要分为两部分：一是解的存在性，二是解的惟一性.

存在性 先构造一个值为零的如下 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_i & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0 \quad (1\leqslant i\leqslant n). \tag{1.11}$$

将上式左边的行列式按第一行展开，共有 $n+1$ 项. 显然，(1,1)及(1,2)位置的代数余子式分别为 D 及 $-D_1$. 将(1,3)位置上的代数余子式中的第 1,2 两列互换后得其值为 $-D_2$. 再看一般位置$(1,j+1)$，该位置的代数余子式为

$$A_{1j+1}=(-1)^{1+(1+j)}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_i & a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将第 1 列依次与它相邻的后一列互换，直到将它变到第 j 列为止，这时行列式变成了 D_j，又共作了 $j-1$ 次的两列互换，因而有

$$A_{1j+1}=(-1)^{1+(1+j)}\cdot(-1)^{j-1}D_j=-D_j,$$

于是，由式(1.11)有

$$b_iD-a_{i1}D_1-a_{i2}D_2-\cdots-a_{ij}D_j-\cdots-a_{in}D_n=0\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

注意 $D\neq0$，整理得

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{ij}\frac{D_j}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}=b_i\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

说明 $D_1/D,D_2/D,\cdots,D_n/D$ 确是方程组(1.10)的解.

惟一性　设 $x_i=d_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是方程组的解，则

$$d_1D=\begin{vmatrix} a_{11}d_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}d_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}d_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^n a_{1i}d_i=b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \sum\limits_{i=1}^n a_{2i}d_i=b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^n a_{ni}d_i=b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1.$$

在这里，对第一个行列式作了如下变换：从第 2 列开始，将第 i 列的 d_i 倍加到第 1 列($i=2,3,\cdots,n$)，而后就得到了第二个行列式. 于是，$d_1=D_1/D$. 同理可得 $d_2=D_2/D,\cdots,d_n=D_n/D$. □

例 1.15　设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=8, \\ 2x_1-x_2-3x_4=3, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-6x_4=5. \end{cases}$$

该方程组的系数行列式 D 以及 D_1,D_2,D_3 和 D_4 分别为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}=24,\quad D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}=24,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&8&1&-1\\2&3&0&-3\\3&5&5&-6\end{vmatrix}=120,\quad D_3=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&2&8&-1\\2&-1&3&-3\\3&3&5&-6\end{vmatrix}=-120,$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&8\\2&-1&0&3\\3&3&5&5\end{vmatrix}=-48.$$

由于 $D\neq 0$,故方程组有惟一解:

$$x_1=D_1/D=1, x_2=D_2/D=5, x_3=D_3/D=-5, x_4=D_4/D=-2.$$

若线性方程组(1.10)的常数项全为零,即

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0,\end{cases}\tag{1.12}$$

则称该方程组为齐次线性方程组.

齐次线性方程组总有解,因为将 $x_1=0,x_2=0,\cdots,x_n=0$ 代入到方程组(1.12)时满足方程,称这样的解为方程组的零解.由 Cramer 法则,即得

推论 当齐次线性方程组(1.12)的系数行列式不为零时,方程组只有零解.

Cramer 法则只适用于系数能构成行列式,且行列式又不等于零的那些线性方程组,至于更一般的线性方程组的求解问题将在第四章里给予彻底的讨论.值得注意的是,应用 Cramer 法则求解 n 元线性方程组(1.10)时,因为涉及行列式的计算问题,即需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式的值,这样,随着 n 的增大,求解的计算量是相当大的.较之实用性,Cramer 法则在理论上更有用.

习 题 A

1. 用画线法计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix}3&4\\1&2\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix}1&4&6\\0&2&5\\0&0&3\end{vmatrix}$.

2. 计算下列排列的逆序数

(1) 352 14; (2) $123\cdots(n-1)n$; (3) $n(n-1)\cdots321$; (4) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

3. 在所有 n 级排列中,试找出逆序数为最小和最大的排列,这样的排列是否惟一? 又逆序数介于它们之间的排列是否惟一?

4. 选择 i,j 使

(1) $125i86j94$ 为奇排列；(2) $61357ij48$ 为偶排列.

5. 在四阶行列式 $D=|a_{ij}|_4$ 的展开式中,(1) 确定含有因子 $a_{14}a_{33}$ 的项;(2)确定带负号并含有因子 a_{21} 的项.

6. 证明:若一个 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 n^2-n,则此行列式值为零.

7. 用行列式定义计算下列 n 阶行列式

(1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix};$$

该行列式次对角线以下都是 0.

(2)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

8. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_3 & a \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix}$.

9. 证明下列等式

(1) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & b \\ a & a & b & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}=(a+b)(b-a)^3$；　(2) $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix}=0$；

(3) $\begin{vmatrix} a_1+ka_2+la_3 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2+lb_3 & b_2+mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2+lc_3 & c_2+mc_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

10. 按第三行展开行列式,并计算其值

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

11. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_n$;　(2) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} a & & & & & & b \\ & a & & & & b & \\ & & \ddots & & ⋰ & & \\ & & & a\ b & & & \\ & & & c\ d & & & \\ & & ⋰ & & \ddots & & \\ & c & & & & d & \\ c & & & & & & d \end{vmatrix}_{2n}$.

12. 证明

(1) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$;

(2) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\ (a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0)$.

13. 解下列方程式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0$,

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 为互不相同的数；

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$.

14. 利用 Laplace 展开定理计算

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

15. 解下列方程组

(1) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ ax+by+cz=d, \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2, \end{cases}$

其中 a,b,c 为互不相同的数；

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+5x_3+7x_4=14, \\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4, \\ 7x_1+x_2+3x_3+5x_4=16. \end{cases}$

习　题　B

1. 设 $j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n$ 为一个 n 级排列，求

$$\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n)+\tau(j_nj_{n-1}\cdots j_2j_1),$$

这里 $\tau(\cdot)$表示排列的逆序数.

2. 设 n 级行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 求

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & 2_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix},$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 n 级排列，求和对所有 n 级排列进行.

3. 证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{i1}(t) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{i2}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{in}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

4. 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-2}&a_2^{n-2}&\cdots&a_n^{n-2}\\a_1^n&a_2^n&\cdots&a_n^n\end{vmatrix}.$$

5. 计算行列式

$$D(n)=\begin{vmatrix}1&&&&&2\\&2&&&3&\\&&\ddots&\iddots&&\\&&n&n+1&&\\&&n+2&n+3&&\\&&\iddots&\ddots&&\\&4&&&5&\\3&&&&&4\end{vmatrix}_{2n}.$$

6. 行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\ca_n&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\ca_{n-1}&ca_n&a_1&\cdots&a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ca_2&ca_3&ca_4&\cdots&a_1\end{vmatrix},$$

称为 n 阶 c 轮换行列式. 证明,当 $c\neq0$ 时

$$D_n=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n),$$

其中 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_{i+1}x^i$, 而 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $x^n=c$ 的 n 个根.

第二章　矩　　阵

矩阵的思想在数学史上早已有之，但真正矩阵概念的出现较之行列式要晚.历史上最早提出矩阵概念的动机是为了研究行列式.矩阵和线性方程组，于1850年和1855年分别由Sylvester和Cayley两位数学家先后提出.今天，矩阵论已经发展成为了一门重要的数学分支，同时在许多领域有着广泛的应用.从某种意义上讲，矩阵是线性代数的“灵魂”.

第一节　矩阵的概念及其基本运算

由 $m\cdot n$ 个元素排列成的具有 m 个行、n 个列的矩形阵列：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为矩阵.为了体现整体性，一般用圆括号或方括号将其括起来而表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{或}\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

由于它有 m 个行、n 个列，所以也称 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵.上面的矩阵也可以简单地记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.注意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行、第 j 列位置 (i,j) 上的元素 a_{ij} 的两个下标的写法，i 表示行标，j 表示列标.

矩阵与行列式在本质上是不相同的两个概念.矩阵可以理解为“数表”，它不是一个数值(除了 1×1 阶矩阵可以认同为数值外)，而行列式却是一个地地道道的数值.

元素全是实数的矩阵称为实矩阵.本书主要讨论实矩阵.

下面引进关于矩阵的基本概念和运算.

一、相等

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times t}$，称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，若有

$$m=s, n=t \text{ 且 } a_{ij}=b_{ij} (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n).$$

概括地讲，矩阵相等就是两个矩阵完全一样，即阶数相同且对应位置元素相等.

二、加法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$. 记 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$，称矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

注意，并不是任意两个矩阵都能做加法，只有同样阶数的两个矩阵才可加. 阶数相同的两个矩阵相加，就是对应位置上的元素相加而矩阵阶数不变.

例 2.1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{则 } \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

元素全为零的矩阵称为零矩阵，记为 $\boldsymbol{O}$. 需要注意的是，由于存在着阶数的差异，并不是任意两个零矩阵都相等.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$. $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵就是将 $\boldsymbol{A}$ 的所有位置上的元素都取为负值所得.

借助于负矩阵的概念可以定义矩阵的减法，即

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+(-\boldsymbol{A}).$$

由该定义式知，只有阶数相同的两个矩阵才能做减法，矩阵相减就是对应位置上的两个元素相减而矩阵阶数不变.

不难验证，矩阵加法具有下列性质：

(i) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；(交换律)

(ii) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；(结合律)

(iii) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$；

(iv) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

三、数乘法

设 k 为数，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵. 称矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 为 k 与 $\boldsymbol{A}$ 的数积，记 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$.

任何一个数与任何一个矩阵都可以做数乘，数乘就是将数乘到矩阵的每个位置上去而矩阵阶数不变.

不难验证，矩阵数乘法具有下列性质：

(i) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

(ii) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$ (k,l 为数)；

(iii) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$ (k,l 为数)；

(iv) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$　(k 为数).

例 2.2　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix},\quad 则\ 3\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&6&9&12\\15&18&21&24\end{pmatrix}.$$

四、乘法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$. 记 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,p)$，称 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times p}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

注意，两个矩阵可乘的惟一条件是：前矩阵列数等于后矩阵行数. 当可乘时，所得积的矩阵的行数为前矩阵的行数，列数为后矩阵的列数，其第 (i,j) 位置上的元素为前矩阵第 i 行的元素与后矩阵第 j 列的元素对应乘积和.

例 2.3　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}_{2\times3},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7&10&0\\8&11&1\\9&12&0\end{pmatrix}_{3\times3},则$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1\times7+2\times8+3\times9&1\times10+2\times11+3\times12&1\times0+2\times1+3\times0\\4\times7+5\times8+6\times9&4\times10+5\times11+6\times12&4\times0+5\times1+6\times0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}50&68&2\\122&167&5\end{pmatrix}.$$

例 2.4　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}_{n\times1},\boldsymbol{B}=(b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_n)_{1\times n},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}_{n\times n},\boldsymbol{BA}=\Big(\sum_{i=1}^{n}b_ia_i\Big)_{1\times1}=\sum_{i=1}^{n}b_ia_i.$$

例 2.5　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}. 则\ \boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix},但\ \boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

注：一个 1×1 阶的矩阵与构成该矩阵的元素等同起来，即 $(a)_{1\times1}=a$.

不难验证，矩阵乘法具有下列性质：

(i) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$（结合律）；

(ii) $A(B+C)=AB+AC$(左分配律),$(A+B)C=AC+BC$(右分配律);

(iii) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$(其中 k 为数).

需要注意的是,矩阵乘法没有交换律,即 $AB\neq BA$. 这是因为:首先,A,B 可乘,但 B,A 未必一定可乘(如例 2.3);其次,即使 A,B 及 B,A 都可乘,其积 AB 与 BA 的阶数也未必相同(如例 2.4);再者,即使 AB 与 BA 阶数都相同,对应位置上的元素也未必都一定相等(如例 2.5). 由此可知,能够满足矩阵乘法可交换的条件将是相当苛刻的.

例 2.6 若 $AB=BA$,则矩阵 A 与 B 是同阶方阵(见本节末).

证 设 $A=A_{n\times m}$,$B=B_{r\times s}$. 若 $A_{n\times m}B_{r\times s}$有意义,则必 $m=r$;若 $B_{r\times s}A_{n\times m}$有意义,则必 $s=n$;若使等式 $A_{n\times m}B_{r\times s}=B_{r\times s}A_{n\times m}$成立,则必 $n=r,s=m$. 综上即有:$n=m=r=s$.

我们知道,在数的乘法运算中,有这样一个命题:若 $ab=ac$ 且 $a\neq 0$,则 $b=c$. 这就是所谓的消去律. 在矩阵乘法运算中,消去律不再成立了. 等价地,两个非零矩阵的乘积有可能为零(见下面的例 2.7).

例 2.7 设

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix},M=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}.$$

则 $A\neq O,M\neq O,B\neq C$. 但却有 $AB=AC=\begin{pmatrix}3&1\\-3&-1\end{pmatrix}$,及 $AM=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$.

五、矩阵的转置

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$. 记 $b_{ij}=a_{ji}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$,称矩阵$(b_{ij})_{n\times m}$为 A 的转置矩阵,记 $A^{\mathrm{T}}=(b_{ij})_{n\times m}$(或 $A'=(b_{ij})_{n\times m}$).

矩阵转置也可以这样得到:将矩阵 A 的第 i 行写成矩阵 A^{T} 的第 i 列($i=1,2,\cdots,m$),或将 A 的第 i 列写成 A^{T} 的第 i 行($i=1,2,\cdots,n$). $m\times n$ 阶的矩阵转置后变为 $n\times m$ 阶.

例 2.8 设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix},\quad 则\ A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}.$$

显然,矩阵转置具有下列性质:

(i) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$;

(ii) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

(iii) $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$($k$ 为数);

(iv) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$(即两个矩阵积的转置等于反序转置的积).

下面讨论方阵. 所谓方阵就是行数与列数相等的矩阵. $n\times n$ 阶矩阵简称为 n 阶方阵. 与行列式一样，方阵也有主对角线，即从左上角到右下角所画出的那条线段.

对角矩阵：主对角线之外全是零的方阵，即形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

的矩阵，有时将它记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

单位矩阵：主对角线全是 1 的对角矩阵，即形如

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

的矩阵. n 阶单位矩阵有时记为 $\boldsymbol{E}_n$（或 $\boldsymbol{I}_n$）. 显然，$\boldsymbol{E}_n=(\delta_{ij})_n$（$\delta_{ij}$ 为 Kronecker 符号）.

单位矩阵具有性质：

$\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$.（即任一矩阵若能与 $\boldsymbol{E}$ 左或右乘，则乘积结果不变）

设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，规定 $\boldsymbol{A}$ 的方幂为：

$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{A}$（$k$ 为正整数）.

显然，矩阵的方幂具有下列性质：

（i）$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$；

（ii）$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$；

（iii）若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

（以上 k 与 l 都是非负整数）.

注：(iii)的逆不成立. 如考虑 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$，而 $\boldsymbol{BA}=0$ 且 $\boldsymbol{A}^2=0$，于是有 $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k\ (k=0,1,2,\cdots)$，但 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 为 n 阶方阵，则 n 阶行列式 $|a_{ij}|_n$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记 $\det\boldsymbol{A}=|a_{ij}|_n$.

定理 2.1　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵，则

$$\det(\boldsymbol{AB})=\det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B}.$$

证　见第一章第五节例 1.14 或本章第四节的例 2.13 及本章第五节中的例 2.16. □

除了定理 2.1，n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式还具有下列性质：

（i）$\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\det\boldsymbol{A}$；

（ii）$\det(k\boldsymbol{A})=k^n\det\boldsymbol{A}$.

称满足条件 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵. 显然,对称矩阵一定是方阵. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$,则 $\boldsymbol{A}$ 是对称的充分必要条件是 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

第二节 逆 矩 阵

上节中我们看到,与矩阵加法运算对应的有减法运算(即所谓加法的逆运算):$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+(-\boldsymbol{A})$. 该运算是由加法及"负阵"所定义,而"负阵"本质上也是由加法运算的性质惟一确定的,即 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的负阵的充要条件是 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$.

能否类似地考虑与乘法运算所对应的"除法"运算呢?

单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 在乘法中的作用与零矩阵 $\boldsymbol{O}$ 在加法中的作用是相似的. 那么在乘法中,与加法的"负阵"相应的概念"逆阵"就应该作如下定义(注意,由于矩阵乘法不可交换,故有左逆、右逆之分):$\boldsymbol{X}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左逆阵,若 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{E}$;$\boldsymbol{X}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右逆阵,若 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}$. 当 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{E}$ 时,称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵. 由例 2.6知,逆阵一定是方阵. 若将 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$,那么就可以形式地定义"除法"运算(还是由于矩阵乘法的不可交换性,有右除与左除之分):$\boldsymbol{B}\div\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}^{-1}$(右除),$\boldsymbol{B}\div\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$(左除). 矩阵"除法"可由乘法及"逆阵"完全表出,故在矩阵运算中,避免做"除法"而只用乘法与逆阵来代替不但是可行的,而且更为方便. 因而,在整个线性代数中将不提及除法运算.

基于以上讨论,我们有

定义 2.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为矩阵,若有矩阵 $\boldsymbol{B}$,使

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵(或可逆的),称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

可逆矩阵又叫非异阵或非奇异阵. 由于可逆矩阵与其逆是乘法可换的,由例 2.6 知,可逆矩阵必是方阵. 易知,单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 是可逆的,零矩阵 $\boldsymbol{O}$ 是不可逆的.

命题 2.2 若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的,则其逆矩阵惟一.

证 设 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆,则有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$. 若 $\boldsymbol{C}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的逆,也应有 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}$. 于是 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{CE}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{AB})=(\boldsymbol{CA})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{B}$. □

由逆矩阵的惟一性,以后将可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

命题 2.3 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$,$k\boldsymbol{A}$(其中数 $k\neq0$),$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也都可逆,且

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A},(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1},(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

证 因为式 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 成立,直接由定义知,$\boldsymbol{A}^{-1}$ 是可逆的,且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;又 $(k\boldsymbol{A})\left(\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\right)=k\left(\boldsymbol{A}\cdot\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\right)=\left(k\cdot\frac{1}{k}\right)(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{E}$ 及

$\left(\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\right)(k\boldsymbol{A})=\left(\frac{1}{k}\cdot k\right)(\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}$，故 $k\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$；由 $\boldsymbol{A}$ 可逆知，存在矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$，使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，对等式两边取转置有 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，说明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是可逆的，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$. □

命题 2.4 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶可逆矩阵，则积 $\boldsymbol{AB}$ 也是可逆的，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

证 因 $(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{E}$，故矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$. □

我们知道，可逆矩阵必是方阵，但并不是任一方阵都可逆，那么怎样判别一个方阵是否可逆呢？如果可逆又怎么求逆呢？为了回答这样的问题，我们先引入两个概念.

设方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

与行列式的情形一样，在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中可以选定某个位置，如第 i 行、第 j 列位置 (i,j). 将该位置 (i,j) 所在的第 i 行及第 j 列从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划掉，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中剩余的 $n-1$ 个行与 $n-1$ 个列元素所构成的行列式记为 M_{ij}，称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为位置 (i,j) 的（或 a_{ij} 的）代数余子式. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 共有 n^2 个位置，故有 n^2 个代数余子式. 由这些代数余子式按如下排法所构成的矩阵

$$\boldsymbol{A}^* := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 伴随矩阵有时也记为 $\mathrm{adj}(\boldsymbol{A})$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个非常好的性质，即

命题 2.5

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}. \tag{2.1}$$

证 由第一章定理 1.3 的推论 1，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^*$ 之积 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ 中 (i,j) 位置上的元素应为 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\det\boldsymbol{A}\,\delta_{ij}$. 于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=(\det\boldsymbol{A}\,\delta_{ij})_n=\det\boldsymbol{A}(\delta_{ij})_n=\det\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}$，同理有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}$. □

定理 2.6 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\det\boldsymbol{A}\neq0$. 当 $\det\boldsymbol{A}\neq0$ 时，$\boldsymbol{A}^{-1}=$

$\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^*$.

证 必要性. 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆,其逆为 $\boldsymbol{A}^{-1}$,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$. 将等式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}$ 两边取行列式,有 $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})=\det \boldsymbol{A}\cdot\det(\boldsymbol{A}^{-1})=\det \boldsymbol{E}=1$,得 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$.

充分性. 当 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$ 时,将式(2.1)的两边同乘以 $\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}$ 有,$\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^*\right)=\left(\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$. 该式说明 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^*$. □

推论 设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵,若有矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

证 因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,两边取行列式有 $\det \boldsymbol{A}\cdot\det \boldsymbol{B}=\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\det \boldsymbol{E}=1$,说明 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$,即 $\boldsymbol{A}$ 可逆;再两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}$,即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$. □

例 2.9 设

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$,则 $\det \boldsymbol{A}=-2\neq 0$,于是 $\boldsymbol{A}$ 可逆

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^*=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

下面利用逆矩阵的概念,给出 Cramer 法则的新证法.

设线性方程组为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}\tag{2.2}$$

其所有系数构成的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

该矩阵称为方程组的系数矩阵.

再设

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}.$$

则原方程组(2.2)可以写成矩阵的形式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}. \tag{2.3}$$

当方程组(2.2)的系数矩阵的行列式 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 在式(2.3)中，两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta},$$

它即为矩阵方程(2.3)的惟一解，具体写出来就是：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}=\left(\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^*\right)\boldsymbol{\beta}$$

$$=\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}} & \sum\limits_{k=1}^{n} b_k A_{k1} \\ \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}} & \sum\limits_{k=1}^{n} b_k A_{k2} \\ & \vdots \\ \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}} & \sum\limits_{k=1}^{n} b_k A_{kn} \end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{x}_i=\dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k A_{ki}\ (i=1,2,\cdots,n)$. 而这里的 $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k A_{ki}$ 就是方程组(2.2)中，将系数行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 中的第 i 列用常数项列 $(b_1\quad b_2\quad \cdots\quad b_n)^{\mathrm{T}}$ 代换后所得的那个行列式，该行列式也就是定理 1.5 中的 $\boldsymbol{D}_i$.

第三节　分块矩阵

所谓分块矩阵就是对矩阵作适当分块后所得到的矩阵，它是处理矩阵问题的一种方法，灵活恰当的运用，常可获事半功倍的效果.

将 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 用横线分成 s 个行块，用纵线分成 t 个列块，这样 $\boldsymbol{A}$ 就可以看成是由 st 个子块(或子矩阵)构成的一个 $s\times t$ 阶的分块矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}_{s\times t},$$

其中每个 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是由一些相应位置上的元素构成的“小”矩阵. 例如

$$A=\left(\begin{array}{cc:ccc}1&0&1&1&1\\0&1&1&1&1\\ \hdashline 5&5&2&0&0\\5&5&0&2&0\\5&5&0&0&2\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_2&\boldsymbol{N}\\5\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}&2\boldsymbol{E}_3\end{pmatrix},$$

这里,$\boldsymbol{A}$ 是 5×5 阶矩阵,分成两个行块与两个列块后,就成了 2×2 阶的分块矩阵了,其中 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}_2$ 及 $\boldsymbol{E}_3$ 分别是 2 阶和 3 阶单位矩阵.分块后,原矩阵的特点就非常清晰地反映出来了.

至于矩阵具体如何分块,一般没有限制,但应把握个原则,即突出特点,便于简化处理.

下面讨论分块矩阵的运算.

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 阶矩阵,对 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 作分法完全一样的分块:

$$\boldsymbol{A}=\begin{matrix}\\ m_1\\ m_2\\ \vdots\\ m_s\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}n_1&n_2&\cdots&n_t\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1t}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{s1}&A_{s2}&\cdots&A_{st}\end{pmatrix}_{s\times t}\end{matrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{matrix}\\ m_1\\ m_2\\ \vdots\\ m_s\end{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}n_1&n_2&\cdots&n_t\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&\cdots&B_{1t}\\B_{21}&B_{22}&\cdots&B_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\B_{s1}&B_{s2}&\cdots&B_{st}\end{pmatrix}_{s\times t}\end{matrix},$$

其中 m_i 表示第 i 个行块所包含原矩阵的行数,n_j 表示第 j 个列块所包含原矩阵的列数.则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow A_{ij}=B_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t);$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}A_{11}+B_{11}&A_{12}+B_{12}&\cdots&A_{1t}+B_{1t}\\A_{21}+B_{21}&A_{22}+B_{22}&\cdots&A_{2t}+B_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{s1}+B_{s1}&A_{s2}+B_{s2}&\cdots&A_{st}+B_{st}\end{pmatrix}_{s\times t};$$

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}kA_{11}&kA_{12}&\cdots&kA_{1t}\\kA_{21}&kA_{22}&\cdots&kA_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\kA_{s1}&kA_{s2}&\cdots&kA_{st}\end{pmatrix}_{s\times t};$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}A_{11}^{\mathrm{T}}&A_{21}^{\mathrm{T}}&\cdots&A_{s1}^{\mathrm{T}}\\A_{12}^{\mathrm{T}}&A_{22}^{\mathrm{T}}&\cdots&A_{s2}^{\mathrm{T}}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1t}^{\mathrm{T}}&A_{2t}^{\mathrm{T}}&\cdots&A_{st}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}_{t\times s}.$$

在分块矩阵的运算中,用处较多的是下面分块矩阵的乘法.

设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n$ 及 $n\times l$ 矩阵,分别对 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 分块为:

$$\boldsymbol{A}=\begin{matrix} & n_1 & n_2 & \cdots & n_t \\ m_1 & A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ m_2 & A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_s & A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{matrix}_{s\times t},\quad \boldsymbol{B}=\begin{matrix} & l_1 & l_2 & \cdots & l_u \\ n_1 & B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1u} \\ n_2 & B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2u} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_t & B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tu} \end{matrix}_{t\times u},$$

则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{matrix} & l_1 & l_2 & \cdots & l_u \\ m_1 & C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1u} \\ m_2 & C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2u} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_s & C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{su} \end{matrix}_{s\times u},$$

其中 $C_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,u)$.

简言之，当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可乘时，只要 $\boldsymbol{A}$ 的列块的分法与 $\boldsymbol{B}$ 的行块的分法保持完全一致时，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 作为分块矩阵也可乘，乘法的规则形式上与没有分块时的情况是完全一样的.

例 2.10　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

易知 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$，$\boldsymbol{A}$ 可逆. 如何求 $\boldsymbol{A}$ 的逆呢？若用伴随矩阵的方法需先求出 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，这样就要先计算 16 个 3 阶行列式的值，显然比较麻烦. 现在，我们用分块矩阵的方法来求逆. 首先对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做如下分块：

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{O}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

由定理 2.6 之推论，下面求满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}$ 的待定矩阵 $\boldsymbol{X}$. 将 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 都作与 $\boldsymbol{A}$ 完全相同的分块：

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12} \\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_2 \end{pmatrix},$$

则有 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12} \\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_2 \end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{BX}_{11}+\boldsymbol{CX}_{21} & \boldsymbol{BX}_{12}+\boldsymbol{CX}_{22} \\ \boldsymbol{DX}_{21} & \boldsymbol{DX}_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_2 \end{pmatrix}$.

于是有：

$$\begin{cases}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{11}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{21}=\boldsymbol{E}_2,\\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_{12}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{O},\\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}_{21}=\boldsymbol{O},\\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{E}_2.\end{cases}$$

因 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$ 都可逆，解之得

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_{11}=\boldsymbol{B}^{-1},\\ \boldsymbol{X}_{12}=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{-1},\\ \boldsymbol{X}_{21}=\boldsymbol{O},\\ \boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{D}^{-1}.\end{cases}$$

从而

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}^{-1}\end{bmatrix}.$$

对于二阶矩阵，最适用的求逆法莫过于伴随矩阵的方法了：

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{-1}=\begin{pmatrix}74 & -42\\ -30 & 17\end{pmatrix}$，于是

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}3 & -2 & -74 & 42\\ -1 & 1 & 30 & -17\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -7 & 4\end{bmatrix}.$$

例 2.11 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 阵. 若 $m>n$，作分块：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_n\\ \boldsymbol{A}_{m-n}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_n\quad \boldsymbol{B}_{m-n}),$$

其中 $\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{B}_n$ 都是 n 阶方阵，于是

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_n\\ \boldsymbol{A}_{m-n}\end{pmatrix}(\boldsymbol{B}_n\quad \boldsymbol{B}_{m-n})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_n & \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_{m-n}\\ \boldsymbol{A}_{m-n}\boldsymbol{B}_n & \boldsymbol{A}_{m-n}\boldsymbol{B}_{m-n}\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_m=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_{m-n}\end{bmatrix}.$$

从而

$$\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_n=\boldsymbol{E}_n,\quad \boldsymbol{A}_{m-n}\boldsymbol{B}_{m-n}=\boldsymbol{E}_{m-n},\quad \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_{m-n}=\boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{A}_{m-n}\boldsymbol{B}_n=\boldsymbol{O}.$$

于是，$\boldsymbol{A}_n$ 与 $\boldsymbol{B}_n$ 都可逆，且有 $\boldsymbol{A}_{m-n}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}_{m-n}=\boldsymbol{O}$，于是 $\boldsymbol{A}_{m-n}\boldsymbol{B}_{m-n}=\boldsymbol{O}$，矛盾. 故应有 $m\leqslant n$. 同理可证 $n\leqslant m$，于是必 $m=n$，说明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是方阵. 于是

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E},$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且其逆为 $\boldsymbol{B}$.

第四节　初等变换与初等矩阵

定义 2.2　对矩阵作下列三种类型的变换分别称为第一、二、三种初等行(列)变换：

1. 互换矩阵的某两行(列)；
2. 某行(列)乘以非零常数；
3. 某行(列)的倍数加到另一行(列).

初等行变换与初等列变换统称为初等变换.当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换变为 $\boldsymbol{B}$ 时,记为 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$.

如果强调变换的具体做法,对行(row)的表示为：$r_i\leftrightarrow r_j$ 表示互换第 i,j 两行；kr_i 表示第 i 行乘以 $k\neq0$；r_i+kr_j 表示第 j 行的 k 倍加到第 i 行.

同理,相应于列(column)初等变换的表示分别有：$c_i\leftrightarrow c_j$，kc_i $(k\neq0)$ 和 c_i+kc_j.

例 2.12　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$,对 $\boldsymbol{A}$ 做初等变换将其化简：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2-2c_1}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&-3&-6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-3c_1,\left(-\frac{1}{3}\right)r_2,c_3-2c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\text{即 }\boldsymbol{A}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

定义 2.3　对单位矩阵作一次初等变换所得到的矩阵称为初等矩阵.

对应于初等行变换的初等矩阵有如下三种类型：

$$\boldsymbol{E}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{P}[i,j]:=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&0&1&&\\&&&\ddots&&\\&&1&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\leftarrow\text{第 } i \text{ 行}\\\\\leftarrow\text{第 } j \text{ 行}\\\\\\\end{matrix};$$

$$\boldsymbol{E}\xrightarrow{kr_i,k\neq0}\boldsymbol{P}[i(k)]:=\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&k&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}\leftarrow\text{第 } i \text{ 行};$$

$$\boldsymbol{E}\xrightarrow{r_i+kr_j}\boldsymbol{P}[i+j(k)]:=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&k&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\leftarrow\text{第 } i \text{ 行}\\\\\leftarrow\text{第 } j \text{ 行}\\\\\\\end{matrix}.$$

再来看关于初等列变换的初等矩阵：

$$\boldsymbol{E}\xrightarrow{c_i\leftrightarrow c_j}\begin{array}{c}\begin{matrix}&&i&&j&&\\&&\downarrow&&\downarrow&&\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}=\boldsymbol{P}[i,j];$$

$$\boldsymbol{E}\xrightarrow{kc_i,k\neq0}\begin{array}{c}\begin{matrix}&&i&&\\&&\downarrow&&\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&k&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}\end{array}=\boldsymbol{P}[i(k)];$$

$$\boldsymbol{E}\xrightarrow{c_i+kc_j}\begin{array}{c}\begin{matrix}&&i&&j&&\\&&\downarrow&&\downarrow&&\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&k&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\end{array}=\boldsymbol{P}[j+i(k)].$$

由上可知，无论是对行的还是对列的，初等矩阵只有三种类型：$\boldsymbol{P}[i,j]$，$\boldsymbol{P}[i(k)]$及 $\boldsymbol{P}[i+j(k)]$. 下面的定理揭示了初等变换与初等矩阵之间的内在联

系，叫做初等变换与初等矩阵的关系定理.

定理 2.7　对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等行(列)变换后所得到的矩阵等于对 $\boldsymbol{A}$ 左(右)乘上一个相应的初等矩阵.

这里，所谓“相应的初等矩阵”是指：无论对 $\boldsymbol{A}$ 作一次什么样的初等变换，对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 也作一次完全相同的初等变换后所得到的那个初等矩阵.

证　只对行变换的情况加以证明，对列变换的证明完全是类似的.

将 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行分成一个行块后得一 $m\times 1$ 的分块矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}.$$

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}$，而

$$\boldsymbol{P}[i,j]\cdot\boldsymbol{A}=\begin{matrix}\\ \\ i\rightarrow\\ \\ j\rightarrow\\ \\ \\ \end{matrix}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\ &\ddots&&&&&\\ &&0&&1&&\\ &&&\ddots&&&\\ &&1&&0&&\\ &&&&&\ddots&\\ &&&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

故 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}[i,j]\boldsymbol{A}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}\xrightarrow{kr_i,k\neq 0}\boldsymbol{B}:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \vdots\\ k\boldsymbol{\alpha}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}$，而

$$\boldsymbol{P}[i(k)]\cdot\boldsymbol{A}=i\rightarrow\begin{pmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&k&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_i\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\vdots\\k\boldsymbol{\alpha}_i\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

故 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{kr_i}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}[i(k)]\boldsymbol{A}$.

3\. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_i\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_j\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}\xrightarrow{r_i+kr_j}\boldsymbol{B}:=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_i+k\boldsymbol{\alpha}_j\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_j\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}$,而

$$\boldsymbol{P}[i+j(k)]\cdot\boldsymbol{A}=\begin{matrix}\\\\i\rightarrow\\\\j\rightarrow\\\\\\\end{matrix}\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&\cdots&k&&\\&&&\ddots&\vdots&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_i\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_j\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_i+k\boldsymbol{\alpha}_j\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_j\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

故 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r[i+j(k)]}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}[i+j(k)]\boldsymbol{A}$. □

命题 2.8 初等矩阵都是可逆矩阵,且它们的逆也都是同类型的初等矩阵,即

$$\boldsymbol{P}[i,j]^{-1}=\boldsymbol{P}[i,j],\boldsymbol{P}[i(k)]^{-1}=\boldsymbol{P}[i(k^{-1})](k\neq0),$$
$$\boldsymbol{P}[i+j(k)]^{-1}=\boldsymbol{P}[i+j(-k)].$$

证 应用定理 2.7 即可,请读者完成这个证明. □

例 2.13 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,证明

$$\det(\boldsymbol{AB})=\det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B}.$$

证 参照第一章第四节性质 1.7 后面的讨论易知,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以只经过第 3 种类型的初等行、列变换(某行(列)的倍数加到另一行(列))就能化为对角形. 由定理 2.7,即有矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 及 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$ 使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\begin{bmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t,$$

其中每 $\boldsymbol{P}_i$ 及 $\boldsymbol{Q}_j$ 都是形如 $\boldsymbol{P}(i+j(k))$ 的初等矩阵，且由行列式性质 1.6 知，

$$\det \boldsymbol{A}=a_1\cdots a_n.$$

又对角矩阵 $\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{M}$ 等于用 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 分别乘以 $\boldsymbol{M}$ 的第 $1,2,\cdots,n$ 行后所得的矩阵，因而由行列式性质 1.2 有

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}\boldsymbol{M}\right)=a_1\cdots a_n\det \boldsymbol{M}.$$

再反复应用行列式性质 1.6，得

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{AB})&=\det\left(\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_1\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{B}\right)\\ &=\det\left(\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{B}\right)\\ &=a_1\cdots a_n\det(\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_t\boldsymbol{B})\\ &=\det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

例 2.14　在例 2.12 中，对 $\boldsymbol{A}$ 作了五次初等变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-4r_1,c_2-2c_1,c_3-3c_1,\left(-\frac{1}{3}\right)r_2,c_3-2c_2}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

该式对矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 之间关系的刻画还比较粗糙. 通过反复应用定理 2.7，可以建立更精确的关系式：

$$\boldsymbol{P}\left[2\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\cdot\boldsymbol{P}[2+1(-4)]\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P}[1+2(-2)]\cdot\boldsymbol{P}[1+3(-3)]\cdot\boldsymbol{P}[2+3(-2)]=\boldsymbol{B},$$

即

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

从上面例子中看到，初等变换最后可以将矩阵化成非常简单的形式.

定义 2.4　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 称为等价，若 $\boldsymbol{A}$ 可以经过有限次的初等变换化为 $\boldsymbol{B}$.

易知，等价具有下列三个性质：

(i) 反身性：任何矩阵都与自身等价；

(ii) 对称性：若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 也等价；

(iii) 传递性：若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，并且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 也等价，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 等价.

由初等变换与初等矩阵关系定理易知：

命题 2.9 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价的充要条件是存在一些初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$，及 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$，使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_l\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t.$$

定理 2.10 任意 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都与形为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的矩阵等价，其中 $\boldsymbol{E}_r$ 为 r 阶单位阵，$0\leqslant r\leqslant\min\{m,n\}$，并且 r 是惟一的(在下一章第四节中将会看到，r 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩；仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 时，此时 $r=0$，$\boldsymbol{E}_0$ 为数 0). 该矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形.

证 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}$ 已经是标准形了. 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，至多经过两次第一种初等变换即可将 $\boldsymbol{A}$ 的左上角(1,1)位置变为非零元. 因而不妨设 $\boldsymbol{A}$ 中的 $a_{11}\neq 0$，将第 1 行的 $-a_{11}^{-1}a_{i1}$ 倍加到第 i 行($i=2,3,\cdots,m$)，再将第 1 列的 $-a_{11}^{-1}a_{1j}$ 倍加到第 j 列($j=2,3,\cdots,n$)，然后将第 1 行乘以 a_{11}^{-1}，$\boldsymbol{A}$ 变为 $\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}$，这里 $\boldsymbol{A}_1$ 是 $(m-1)\times(n-1)$ 矩阵.

再对 $\boldsymbol{A}_1$ 重复以上的做法，如此下去，最后就得到了标准形矩阵.

至于惟一性的证明，请读者学了下一章后给出. □

此定理又可叙述为：对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}$，都有初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$，及 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$，使

$$\boldsymbol{P}_l\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

定理 2.11 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可表为有限个初等矩阵的乘积.

证 必要性. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$，及 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$ 使

$$\boldsymbol{P}_l\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\quad r\leqslant n.$$

两边取行列式，有 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\det(\boldsymbol{P}_l)\cdot\cdots\cdot\det\boldsymbol{P}_2\cdot\det\boldsymbol{P}_1\cdot\det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{Q}_1\cdot\det\boldsymbol{Q}_2\cdot\cdots\cdot\det\boldsymbol{Q}_t$，于是 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}\neq 0$，故必 $r=n$. 于是 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_n$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_l^{-1}\boldsymbol{Q}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{-1}$，而初等矩阵的逆矩阵也都是初等矩阵.

充分性是显然的. □

定理 2.12 对任意 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，都有可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\quad(0\leqslant r\leqslant\min\{m,n\}).$$

下面我们给出求逆矩阵的一种较为实用的方法，即初等变换求逆法.

设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，由定理 2.11，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 可以写成一些初等矩阵的乘积

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_t,$$

其中每个 $\boldsymbol{P}_i$ 都是初等矩阵. 于是有

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E} \quad 及 \quad \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^{-1},$$

从而

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_t(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_t\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{E}\quad\boldsymbol{A}^{-1}).$$

此式即给出了求逆矩阵的一个具体方法：为了求 $\boldsymbol{A}$ 的逆，先在 $\boldsymbol{A}$ 的右侧添加一同阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 而构造成一个 1×2 阶的分块阵 $(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{E})$，然后对此分块阵只做初等行变换，当块 $\boldsymbol{A}$ 所在的位置化为单位阵 $\boldsymbol{E}$ 时，其右侧块 $\boldsymbol{E}$ 所在的位置即化为了所要求的逆阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

例 2.15　用初等变换求逆法求(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 和(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的逆.

(1) $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&-2&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\left(-\frac{1}{2}\right)r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

(2) $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}2&1&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}2&0&0&-1&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{pmatrix}2&0&0&-1&1&0\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{1}{2}\right)r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

于是，$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

第五节 分块矩阵的初等变换与初等分块矩阵

上节所讨论的内容，可以平行地推广到分块矩阵上来. 在本节中，我们对此问题只作一个简单的介绍.

定义 2.5 对分块矩阵作下列三种类型的变换，分别称为分块矩阵的第一、二、三种初等行(列)变换：

1. 互换分块矩阵的某两个行(列)块；
2. 某个行(列)块左(右)乘一个可逆方阵；
3. 某个行(列)块左(右)乘一矩阵后加到另一行(列)块.

分块矩阵的初等行变换与初等列变换统称为分块矩阵的初等变换.

这里应注意的是，由于矩阵乘法没有交换律，故在第二、三种初等变换中乘以矩阵时要有左、右乘之分. 作行变换一律是左乘，作列变换一律是右乘.

单位矩阵可按如下方式分块：

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_1 & & & \\ & \boldsymbol{E}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{E}_t\end{pmatrix},$$

其中每个 $\boldsymbol{E}_i$ 也都是单位矩阵，该分块矩阵称为单位分块矩阵.

定义 2.6 对单位分块矩阵作一次分块矩阵的初等变换后所得的分块矩阵，称为初等分块矩阵.

同样地，初等分块矩阵也有如下三种类型：

$$\boldsymbol{P}[i,j]=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{E}_j & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \boldsymbol{E}_i & \cdots & \boldsymbol{O} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \boldsymbol{E}_t\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 个行块} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 个行块} \\ \\ \\ \end{matrix},$$

$$\boldsymbol{P}[i(\boldsymbol{C})]=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boldsymbol{C} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boldsymbol{E}_t\end{pmatrix}\leftarrow \text{第 } i \text{ 个行块(其中 } \boldsymbol{C} \text{ 是可逆矩阵)},$$

$$\boldsymbol{P}[i+j(\boldsymbol{K})]=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boldsymbol{E}_i & \cdots & \boldsymbol{K} & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & \boldsymbol{E}_j & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \boldsymbol{E}_t\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow \text{第 } i \text{ 个行块} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 个行块}\end{matrix}$$

以下是分块矩阵的初等变换与初等分块矩阵的关系定理.

定理 2.13　对分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次分块矩阵的初等行(列)变换后所得到的新的分块矩阵,等于对 $\boldsymbol{A}$ 左(右)乘上一个相应的初等分块矩阵.

下面我们再给出本章第一节末定理 2.1 的证明.

例 2.16　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵,证明

$$\det(\boldsymbol{AB})=\det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B}.$$

证　先构造如下分块矩阵并对其作分块矩阵的初等行变换:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(\boldsymbol{A})r_2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB}\\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix},$$

由定理 2.13,有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB}\\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$,记 $\boldsymbol{P}_{ij}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n & a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}$,其中 n 阶方阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 的 (i,j) 位置为 1,其余位置为 0. 反复应用定理 2.13. 则

$$\prod_{i,j=1}^{n}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{P}_{12}\cdots\boldsymbol{P}_{1n}\boldsymbol{P}_{21}\boldsymbol{P}_{22}\cdots\boldsymbol{P}_{2n}\cdots\boldsymbol{P}_{n1}\boldsymbol{P}_{n2}\cdots\boldsymbol{P}_{nn}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{pmatrix},$$

于是,式(2.4)变为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB}\\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\prod_{i,j=1}^{n}\boldsymbol{P}_{ij}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

其实,$\boldsymbol{P}_{ij}$ 不仅是初等分块矩阵,也是一般的初等矩阵,即 $\boldsymbol{P}_{ij}$ 是单位矩阵 $\boldsymbol{E}_{2n}$ 的第 $(n+j)$ 行的 a_{ij} 倍加到第 i 行后所得. 由定理 2.7,用 $\boldsymbol{P}_{ij}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{M}$ 相当于对 $\boldsymbol{M}$ 作第三种初等行变换,由行列式性质知,此时应该有 $\det(\boldsymbol{P}_{ij}\boldsymbol{M})=\det\boldsymbol{M}$. 反复将这一原理应用到式(2.5),即有:

$$\begin{vmatrix} O & AB \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix}.$$

两边分别作 Laplace 展开，有

$$\det(-E)\cdot(-1)^{1+2+\cdots n+(n+1)+\cdots+2n}\det(AB)=\det A\cdot\det B,$$

即 $(-1)^{2n(n+1)}\det(AB)=\det A\cdot\det B$，从而 $\det(AB)=\det A\cdot\det B$.

与初等行变换求逆法一样，也可以对分块矩阵只做分块矩阵的初等行变换来求逆.

例 2.17 现在，我们回过头来再看第三节中的例 2.10. 对于分块矩阵

$$A=\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix},$$

其中子阵 B 与 D 都是可逆方阵，运用分块矩阵初等行变换求逆矩阵的原理，有

$$(A\quad E)=\begin{bmatrix} B & C & E_2 & O \\ O & D & O & E_2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} B & O & E_2 & -CD^{-1} \\ O & D & O & E_2 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} E_1 & O & B^{-1} & -B^{-1}CD^{-1} \\ O & E_2 & O & D^{-1} \end{bmatrix},$$

于是，

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}CD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}.$$

习 题 A

1. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(1) 求 $3A-4B$；(2) 求 AC,BD；(3) 求 A^T,A^TB,D^TD,DD^T.

2. 求与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 乘法可交换的所有矩阵 $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^n.

4. 设

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

求：(1) A^2-B^2；(2) $(A-B)(A+B)$；(3) $AB-BA$.

5. 设 $AB=BA$，试证下列等式：

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$；(2) $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$.

6. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}^6$.

7. 求下列各矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$；　　(4) $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}_n$.

8. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix},$$

试计算$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{E})$及$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$.

9. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^6$ 及 $\boldsymbol{A}^{11}$.

10. 解矩阵方程

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

11. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},$$

求 $\boldsymbol{B}$.

12. 已知 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^5$.

13. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，求$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^n$，$\boldsymbol{A}^n$（$n$为正整数）.

14. 设4×4矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$均为$4\times1$矩阵，已知$\det\boldsymbol{A}=4$，$\det\boldsymbol{B}=1$，求$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$.

15. 设n阶方阵$\boldsymbol{A}$，数k，试证明$\det(k\boldsymbol{A})=k^n\det\boldsymbol{A}$.

16. 设n阶方程$\boldsymbol{A}$，$\det\boldsymbol{A}=a\neq0$，求$\det(\boldsymbol{A}^*)$.

17. 设实方阵$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，且$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，证明：$\det\boldsymbol{A}\neq0$.

18. 设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，若$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，其中$k$为正整数，证明

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}.$$

19. 若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶方阵，且$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$可逆，试证

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA})^{-1}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}.$$

20. 利用分块矩阵乘法计算$\boldsymbol{AB}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:c}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 2\end{array}\right),\quad \boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 6 & 1\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

21. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 3\\ 0 & 0 & 5 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 6 & 2\end{pmatrix}.$$

用分块矩阵求：(1) $\boldsymbol{AB}$；(2) $\boldsymbol{BA}$；(3) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$；(4) $\boldsymbol{A}^{-1}$.

22. 设对角矩阵$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中$a_i\neq a_j\ (i\neq j)$. 试证：与$\boldsymbol{A}$可交换的矩阵一定是对角矩阵.

习　题　B

1. 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$为$n$阶方阵，$\boldsymbol{A}$的主对角元之和

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}):=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

称为$\boldsymbol{A}$的迹. 试证明矩阵迹的下列性质：

(1) $\mathrm{tr}(k\boldsymbol{A})=k\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$，其中$k$为数；

(2) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$，其中$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为同阶方阵；

(3) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$，其中$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$分别为$n\times m$，$m\times n$阶矩阵；

(4) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}^2$，其中$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$.

2. 证明：任意方阵$\boldsymbol{A}$可以写成$\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$的形式，其中$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=0$.

3. 设$\boldsymbol{A}$为实方阵，证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow$对任意方阵$\boldsymbol{B}$，都有$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BA})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$.

4. 证明：

(1) 两个上三角形矩阵的积还是上三角的；

(2) 可逆上三角形矩阵的逆还是上三角的.

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 $n\times m$ 阶和 $m\times n$ 阶矩阵,证明:

(1) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix}=\det(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA})$;

(2) $\det(\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{AB})=\lambda^{n-m}\det(\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{BA})$,其中数 $\lambda\neq 0$.

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵.证明:分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 也是可逆的,并求它的逆矩阵.

第三章　向量　线性关系　秩

19 世纪中前期起，数学家和物理学家已经开始频繁使用向量概念了，并将一些三维的结果推广到了 n 维，这期间起主要作用的数学家有 Hamilton，Grassmann 和 Peano. 而秩的概念的出现要稍晚些，于 1879 年由 Frobenius 首先提出.

我们知道，所谓向量就是既有大小又有方向的量，向量又称矢量. 仅有大小没有方向的量叫做数量（或标量）. 在平面或空间中取定原点建立坐标系后，一般的向量就可以和一个有序数组一一对应了（平面对应的数组形式为 (x,y)，空间对应的数组形式为 (x,y,z)）. 这种有序数组完全表示了向量，所以在线性代数中，称这种有序数组为向量. 平面中的向量是 2 维的，空间中的向量是 3 维的. 本章目的是一般化地讨论 n 维向量之间的线性关系，并建立向量组与矩阵秩的概念.

第一节　向　　量

借助于已经熟悉的矩阵知识，我们可以更透彻地理解作为有序数组的向量概念.

定义 3.1　所谓 n 维向量就是 $n\times 1$ 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

或 $1\times n$ 阶矩阵

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

又，前者称为列向量，后者称为行向量，a_i 称为向量的第 i 个分量. 分量全是实数的向量称为实向量. 由于列向量有着大量的应用，所以一般说到向量，指的都是列向量. 单纯就向量而言，与行列式或矩阵的情形一样，列向量与行向量具有完全相同的性质. 由于排版的原因，在仅讨论向量一般性质的时候，我们经常对行向量进行讨论.

由于向量首先就是矩阵（注意：是只有一行或只有一列这种特殊形式的矩阵），因而矩阵中的各种运算及其性质，向量也自然拥有. 换句话说，向量之间的

各种运算就是矩阵意义上的运算.

1. **相等**　设 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$，则

$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow n=m$　且 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$(即维数相同，对应分量相等).

2. **加法**　只有同维向量才能相加.

设 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n).$$

向量 $\mathbf{0}^{\mathrm{T}}=(0,0,\cdots,0)$叫做零向量，$-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$叫做向量 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的负向量.

例 3.1　设 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(2,-1,0,3)$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(1,2,1,-1)$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(3,1,1,2)$.

加法具有下列基本性质：

(i) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；(交换律)

(ii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；(结合律)

(iii) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$；

(iv) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$.

3. **数乘**　设 k 为数，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$为向量，向量 $k\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$叫做 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数乘向量.

例如，设向量 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(1,2,3)$，则 $2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(2,4,6)$.

数乘具有以下基本性质：

(i) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(ii) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$；

(iii) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

(iv) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

所有 n 维列(行)向量的全体，对于其上所定义的加法与数乘法两种运算，构成了一个 n 维线性空间(见第五章)，亦称向量空间. 以下的讨论，一般都是在 n 维向量空间中进行的.

第二节　线性关系

定义 3.2　向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 称为可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s. \tag{3.1}$$

这时，也称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的一个线性组合.

例 3.2　设 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(2,-1,3,0)$及 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}=(1,0,0,1)$，$\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}=(0,1,0,-1)$，$\boldsymbol{\beta}_3^{\mathrm{T}}=(0,0,1,-1)$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+3\boldsymbol{\beta}_3$，所以向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表

出或向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的一个线性组合.

式(3.1)也可以表为如下(分块)矩阵乘积的形式：

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_s\end{pmatrix}\text{（当 }\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\text{ 为列向量时）；}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=(k_1,k_2,\cdots,k_s)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_s\end{pmatrix}\text{（当 }\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\text{ 为行向量时）.}$$

定义 3.3　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 称为线性相关，若存在一组不为全零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}. \tag{3.2}$$

不线性相关的向量组称为线性无关.

换句话说，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是：对于任意一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，只要 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$，则必 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$.

例 3.3　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,2,3,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(2,3,4,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(3,4,5,6)$，$\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}=(4,5,6,7)$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，还有 $0\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性相关的，这里也同时说明线性组合(3.2)中不全为零的组合系数有多种选择.

例 3.4　考虑向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,0,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(0,1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(1,0,1,1)$. 若令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$，即 $(k_1+k_3,k_2,k_1+k_2+k_3,k_3)=\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$，知 $k_1=k_2=k_3=0$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

显然，一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，那么，$\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$.

对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，如何判断它们是线性相关还是线性无关呢？可以考虑关于组合系数 x_i 的方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0} \tag{3.3}$$

是否有非零解的问题. 若方程(3.3)有非零解，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关；若方程(3.3)无非零解，或当方程(3.3)只有零解时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

向量组

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}=(1,0,0,\cdots,0),\\\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}=(0,1,0,\cdots,0),\\\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}=(0,0,0,\cdots,1),\end{cases}$$

称为 n 维标准单位向量组. 其实，这里的每个 $\boldsymbol{e}_i$ 就是 n 阶单位矩阵中的第 i 列.

n 维标准单位向量组有两个基本性质：1. 它们线性无关；2. 每个 n 维向量都可由它们线性表示. 这是因为

若 $x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{0}$，则 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{0}\Rightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，说明 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关. 再设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为一 n 维向量，则

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\alpha}=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n,$$

说明任一 n 维向量都可被 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性表出.

命题 3.1 若向量组有一个部分组线性相关，则它们线性相关.

证 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，由定义，有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{0}$. 于是有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+0\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0},$$

而 $k_1,k_2,\cdots,k_r,0,\cdots,0$ 仍是一组不全为零的数，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. □

推论 (1) 含有零向量的向量组必线性相关；

(2) 线性无关向量组的任一部分组也线性无关.

定理 3.2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是其中有一个向量可被其余向量线性表出.

证 必要性. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则有不全为零的一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}.$$

不妨设 $k_1\neq 0$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\left(-\frac{k_s}{k_1}\right)\boldsymbol{\alpha}_s$.

充分性 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可被其他向量线性表出，即有一组数 $k_2,k_3,\cdots,k_s$ 使

$$\boldsymbol{\alpha}_1=k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s.$$

于是，$(-1)\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$，这里 $(-1),k_2,\cdots,k_s$ 不全为零，因而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. □

定理 3.3 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出，且表出系数惟一.

证 存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,l$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+l\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}.$$

若 $l=0$，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{0}\Rightarrow k_1=k_2=\cdots=k_r=0$ 与这组数不全为零相矛盾. 故 $l\neq 0$，于是有

$$\boldsymbol{\beta}=\left(-\frac{k_1}{l}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(-\frac{k_2}{l}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\left(-\frac{k_r}{l}\right)\boldsymbol{\alpha}_r.$$

表出系数惟一性的证明请读者完成. □

设有向量组：

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}),\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}),\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s^{\mathrm{T}}=(a_{s1},a_{s2},\cdots,a_{sn}).$$

在每一个向量的后面再添加上一维分量，得到如下新的向量组：

$$\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}:=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},b_1)=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},b_1),$$
$$\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}:=(\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},b_2)=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n},b_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\boldsymbol{\beta}_s^{\mathrm{T}}:=(\boldsymbol{\alpha}_s^{\mathrm{T}},b_s)=(a_{s1},a_{s2},\cdots,a_{sn},b_s).$$

向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 叫做向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的加长向量组. 这里是添加了一维的情况，也可以添加若干维，并且新添加的分量也不仅仅限于最后面. 可以在第 1 维的前面加长，也可以在第 1 维和第 2 维之间加长等等，所有这些通过添加分量所得到的新向量组，都叫做原向量组的加长向量组.

命题 3.4　线性无关向量组的加长向量组也线性无关.

证　只证在每一向量的最后加长 1 维的情况，其他加长情况的证明是一样的.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，其加长向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},b_1),\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},b_2),\cdots,\boldsymbol{\beta}_s^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}_s^{\mathrm{T}},b_s)$. 考虑线性组合

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\beta}_s=\mathbf{0},$$

即 $(x_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},x_1b_1)+(x_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},x_2b_2)+\cdots+(x_s\boldsymbol{\alpha}_s^{\mathrm{T}},x_sb_s)=\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$，亦即 $\left(\sum\limits_{i=1}^{s}x_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}},\ \sum\limits_{i=1}^{s}x_ib_i\right)=\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$，从而有

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，故 $x_1=x_2=\cdots=x_s=0$，因而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关.　□

例 3.5　已知 3 维标准单位向量组 $\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}=(1,0,0),\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}=(0,1,0),\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}=(0,0,1)$ 是线性无关的，那么加长向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(9,1,35,0,2,0),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(2,0,99,1,6,0),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(7,0,21,0,1,1),$$

也是线性无关的.

线性相关性具有直观的几何背景. 对于三维实向量的情形：两个向量线性相关的充要条件是它们共线；三个向量线性相关的充要条件是它们共面；四个以及四个以上的向量都是线性相关的（可见下一节定理 3.8 的推论 4）.

第三节　向量组的秩

设有两个向量组分别为

（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$；

（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$.

定义 3.4　若向量组（Ⅰ）中的每个向量都可以由向量组（Ⅱ）线性表出，则称向量组（Ⅰ）可由向量组（Ⅱ）线性表出；若向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）可以互相线性表出，则称向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）等价.

易知，向量组之间的等价关系具有下列性质：

（i）反身性：任一向量组都与自身等价；

（ii）对称性：若向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）等价，则向量组（Ⅱ）也必与向量组（Ⅰ）等价；

（iii）传递性：若向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）等价，向量组（Ⅱ）与向量组（Ⅲ）等价，则必向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅲ）等价.

显然，列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出的充要条件是存在 $s\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{C}.$$

定义 3.5　一向量组的某个部分组称为是向量组的一个极大线性无关组，若该部分组线性无关，并且向量组中没有真包含该部分组的更大线性无关组.

不妨设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的前 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，如果将向量组中其余 $s-r$ 个向量（当 $s>r$ 时）中的任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_j\,(r+1\leqslant j\leqslant s)$ 添加到这个部分组时，都使扩充的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_j$ 线性相关，则部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 就是一个极大线性无关组.

例 3.6　考虑向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(0,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm{T}}=(1,1,1)$. 在这个向量组中，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个极大线性无关组. 注意到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4$ 也是线性无关的，但它们并不是"极大"的，因为 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 添加进来后，所得到的扩充部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 仍线性无关. 这个向量组的极大线性无关组还有：

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5;\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4;\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5;\ \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5;\ \boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4;\ \boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5.$$

由此可知，一般地，向量组的极大线性无关组是不惟一的.

命题 3.5　向量组与它的任一极大线性无关组等价.

证　不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组. 只需证明向量组中的后 $s-r$ 个向量都可被该极大线性无关组线性表出.

任取 $\boldsymbol{\alpha}_j\,(r+1\leqslant j\leqslant s)$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_j$ 是线性相关的，由定理 3.3 知，$\boldsymbol{\alpha}_j$ 可被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出. □

推论　向量组中任意两个极大线性无关组是等价的.

引理 3.6　若列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则当 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 时

(其中 $\boldsymbol{A}$ 为矩阵),有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{r\times s}$,则有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{A}=\left(\sum_{k=1}^{r}a_{k1}\boldsymbol{\alpha}_k,\ \sum_{k=1}^{r}a_{k2}\boldsymbol{\alpha}_k,\cdots,\ \sum_{k=1}^{r}a_{ks}\boldsymbol{\alpha}_k\right)=\boldsymbol{O}.$$

于是,$\sum\limits_{k=1}^{r}a_{ki}\boldsymbol{\alpha}_k=\boldsymbol{0}\,(i=1,2,\cdots,s)$,由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 之线性无关性,得 $a_{1i}=a_{2i}=\cdots=a_{ri}=0(i=1,2,\cdots,s)$,从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. □

定理 3.7 等价的线性无关向量组含有相同个数的向量.

证 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价且都线性无关,则有 $s\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $r\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$,使:

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{A};$$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{B}.$$

于是$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)(\boldsymbol{BA})$,再由引理 3.6,有

$\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{E}_r=\boldsymbol{O}$,即 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_r$;同理有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_s$.

由第二章中的例 2.11 知,$\boldsymbol{A}$ 为方阵,亦即 $r=s$. □

推论 一向量组的极大线性无关组所含向量的个数是惟一的.

由此我们知道,虽然一向量组的极大线性无关组可能有多个,但其每个极大线性无关组所含向量的个数都是相同的,即是惟一的.该惟一性具有重要意义.

定义 3.6 一向量组的极大线性无关组所含向量的个数,称为向量组的秩;若向量组的向量都是零向量,则规定其秩为 0.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩记为 $R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$(或 $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$).易知,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关$\Leftrightarrow R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}=s$.

在例 3.6 中,$R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\}=3$.

定理 3.8 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可被向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出,则

$$R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\leqslant R\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}.$$

证 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$;$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的极大线性无关组为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q$,则由命题 3.5 知,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 可被 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q$ 线性表出.

考虑合并的向量组:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q$.易知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q$ 是该并向量组的一个极大线性无关组,因而并向量组的秩为 q;又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 线性无关,故 $p\not>q$(否则,并向量组的秩就将大于 q),所以 $p\leqslant q$. □

推论 1 等价的向量组具有相等的秩.

推论 2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 线性无关,且可被 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q$ 线性表出,则$p\leqslant q$.

证 $p=R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_q\}\leqslant R\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q\}\leqslant q$. □

推论 3　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 可被 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q$ 线性表出，且 $p>q$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 线性相关.

证　由推论 2 即得. □

推论 4　任意 $n+1$ 个 n 维向量线性相关.

证　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ 是 n 维向量，则它们可被 n 维标准单位向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性表出，由推论 3 即证. □

第四节　矩阵的秩

一个 $n\times m$ 矩阵可以写成如下两种分块矩阵的形式：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{n\times m}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}=(a_{i1}\quad a_{i2}\quad\cdots\quad a_{im})(i=1,2,\cdots,n)$，$\boldsymbol{\beta}_j=(a_{1j}\quad a_{2j}\quad\cdots\quad a_{nj})^{\mathrm{T}}(j=1,2,\cdots,m)$.

$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行，叫做 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组；$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 个列，叫做 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组.

定义 3.7　矩阵的行向量组的秩称为矩阵的行秩；矩阵的列向量组的秩称为矩阵的列秩.

在第二章第四节中，我们介绍了初等变换的概念. 初等变换具有下面很好的性质.

引理 3.9　初等变换不改变矩阵的行秩，也不改变矩阵的列秩.

证　只对初等列变换的情况加以叙述.

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做一次初等列变换，不改变列秩是显然的，比如将第 2 列的 k 倍加到第 1 列

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)\to(\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m).$$

易知两个列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是等价的，故列秩不变. 下证对 $\boldsymbol{A}$ 做一次初等列变换后，$\boldsymbol{A}$ 的行秩也不改变.

不妨只证第 2 列的 k 倍加到第 1 列这种情况，其他情况的证明原理是一样的.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}\to\widetilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+ka_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_1^T \\ \widetilde{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \widetilde{\alpha}_n^T \end{pmatrix}.$$

在 A 中任取 r 个行，不妨设前 r 个行 $\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_r^T$，在 $\widetilde{A}$ 中取同样位置的 r 个行 $\widetilde{\alpha}_1^T,\widetilde{\alpha}_2^T,\cdots,\widetilde{\alpha}_r^T$. 下面证明，这两个向量组具有相同的线性相关性.

考虑方程

$$0^T=\sum_{i=1}^r x_i\alpha_i^T=(x_1,x_2,\cdots,x_r,0,\cdots,0)\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_r^T \\ \alpha_{r+1}^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix}=(x_1,x_2,\cdots,x_r,0,\cdots,0)A, \tag{3.4}$$

及

$$0^T=\sum_{i=1}^r x_i\widetilde{\alpha}_i^T=(x_1,x_2,\cdots,x_r,0,\cdots,0)\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_1^T \\ \widetilde{\alpha}_2^T \\ \vdots \\ \widetilde{\alpha}_r^T \\ \widetilde{\alpha}_{r+1}^T \\ \vdots \\ \widetilde{\alpha}_n^T \end{pmatrix}=(x_1,x_2,\cdots,x_r,0,\cdots,0)\widetilde{A}, \tag{3.5}$$

并且注意 $\widetilde{A}=AP[2+1(k)]$，其中 $P[2+1(k)]$ 为初等矩阵.

易知，方程组(3.4)的解也是方程组(3.5)的解；反之，方程组(3.5)的解也是方程组(3.4)的解. 从而方程组(3.4)有非零解$\Leftrightarrow$方程组(3.5)有非零解. 亦即 $\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_r^T$ 线性相关$\Leftrightarrow\widetilde{\alpha}_1^T,\widetilde{\alpha}_2^T,\cdots,\widetilde{\alpha}_r^T$ 线性相关.

于是 $\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_r^T$ 是 A 的行向量组的极大线性无关组$\Leftrightarrow\widetilde{\alpha}_1^T,\widetilde{\alpha}_2^T,\cdots,\widetilde{\alpha}_r^T$ 是 $\widetilde{A}$ 的行向量组的极大线性无关组. 故 A 的行秩等于 $\widetilde{A}$ 的行秩. □

定理 3.10 矩阵的行秩等于矩阵的列秩.

证 设 A 为秩 r 的任意矩阵，由第二章的定理 2.10 有

$$A\to\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

而矩阵$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$的行秩＝列秩＝$r$. 由引理3.9，$A$的行秩与列秩相等. □

例 3.7 利用这个定理可以直接证明定理3.8的推论4.

设$n+1$个n维行向量分别为$\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T, \alpha_{n+1}^T$，则矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \\ \alpha_{n+1}^T \end{pmatrix}$$

是$(n+1)\times n$阶的. $R\{\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T, \alpha_{n+1}^T\}=A$的行秩$=A$的列秩$\leqslant n<n+1$，即$R\{\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T, \alpha_{n+1}^T\}\leqslant n<n+1$，故$\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T, \alpha_{n+1}^T$线性相关.

定义 3.8 所谓矩阵的秩就是该矩阵的行秩（或者列秩）.

矩阵A的秩记为$R(A)$（或者rank A）.

显然，矩阵转置秩不变. 上面的引理3.9可以转叙为

定理 3.11 初等变换不改变矩阵的秩.

需要指出的是，该定理对分块矩阵也是成立的，即：对分块矩阵做分块矩阵的初等变换不改变分块矩阵的秩.

例 3.8 证明$R(AB)\leqslant R(A), R(B)$.

证 因为$R(AB)\leqslant R(AB\ \ A)$，而$(AB\ A)\xrightarrow{c_1+c_2(-B)}(O\ \ A)$. 故有

$$R(AB)\leqslant R(AB\ \ A)=R(O\ \ A)=R(A).$$

应用这个结论，又有$R(AB)=R((AB)^T)=R(B^TA^T)\leqslant R(B^T)=R(B)$.

与行列式的k阶子式概念类似，可以定义矩阵子式的概念.

定义 3.9 在一个$n\times m$矩阵A中任选k个行与l个列$(k\leqslant n, l\leqslant m)$，位于这些行、列交叉点上的$kl$个元素，按原相互位置关系所形成的$k\times l$阶矩阵称为$A$的一个子阵. 若选取的是$A$的第$i_1<i_2<\cdots<i_k$行及第$j_1<j_2<\cdots<j_l$列，则由这些行、列交叉点上的元素所形成的子阵记为

$$A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_l \end{bmatrix},$$

而称行列式$\det\left\{A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}\right\}$为矩阵$A$的一个$k$阶子式.

定理 3.12 $R(A)=r$的充分必要条件是A至少有一个r阶子式不为零且若A有$r+1$阶子式，则A的所有$r+1$阶子式都为零.

证 在证明中，需要三次用到这样的结论：若方阵$B\to C$，则$\det B=k\det C$，其中数$k\neq 0$. 事实上，当$B\to C$时，存在可逆矩阵P与Q，使$B=PCQ$. 于是有

$\det \boldsymbol{B}=\det(\boldsymbol{PCQ})=\det \boldsymbol{P}\cdot\det \boldsymbol{C}\cdot\det \boldsymbol{Q}=(\det \boldsymbol{P}\cdot\det \boldsymbol{Q})\cdot\det \boldsymbol{C}=k\det \boldsymbol{C}$，其中 $k=\det \boldsymbol{P}\cdot\det \boldsymbol{Q}\neq 0$.

必要性　设 $R(\boldsymbol{A})=r$，则 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r，即 $\boldsymbol{A}$ 有 r 个行线性无关，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 个行线性无关. 由该 r 个行构成的矩阵的列秩也是 r，于是它有 r 个列线性无关，不妨设前 r 个列线性无关，于是 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ 1 & 2 & \cdots & r\end{pmatrix}\to \boldsymbol{E}_r$，故 $\det\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ 1 & 2 & \cdots & r\end{pmatrix}\right)\neq 0$.

$\boldsymbol{A}$ 的任意 $r+1$ 阶子阵 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_{r+1}\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_{r+1}\end{bmatrix}$ 所在的行一定是线性相关的（因 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 r），于是该子阵的行向量组也必线性相关（不然，其加长的结果是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $r+1$ 个线性无关的行，不可），从而该子阵的秩 $<r+1$. 于是有

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_{r+1}\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_{r+1}\end{bmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_p & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\quad (p\leqslant r).$$

故

$$\det\left[\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_{r+1}\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_{r+1}\end{bmatrix}\right]=k\cdot\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_p & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=0.$$

充分性　不妨设 $\det\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ 1 & 2 & \cdots & r\end{pmatrix}\right)\neq 0$，则必有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ 1 & 2 & \cdots & r\end{pmatrix}\to \boldsymbol{E}_r.$$

于是 $R\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ 1 & 2 & \cdots & r\end{pmatrix}\right)=r$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行看作是子阵 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ 1 & 2 & \cdots & r\end{pmatrix}$ 的行向量组的加长向量组，于是 $\boldsymbol{A}$ 之前 r 行线性无关.

现证 $\boldsymbol{A}$ 之任意 $r+1$ 个行，不妨设前 $r+1$ 个行必线性相关. 考虑反证法：若不然，由必要性的证明，$\boldsymbol{A}$ 存在一个 $r+1$ 阶子式 $\neq 0$，与题设不符. 从而 $\boldsymbol{A}$ 之前 r 个行为极大线性无关组，于是 $R(\boldsymbol{A})=r$. □

定义 3.10　若方阵的秩等于它的阶数，则称该矩阵是满秩的，否则称为降秩的.

推论　$\boldsymbol{A}$ 是满秩的 $\Leftrightarrow \det \boldsymbol{A}\neq 0$.

下面讨论矩阵秩的求法.

形如下面的矩阵称为阶梯形矩阵：

$$\begin{bmatrix}21 & -2 & 9 & 5\\ 0 & 3 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0 & -1 & 5 & 2 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

它们有一个共同特点，就是每行第一个非零元的下面及左下方元素都是 0，且零行下面也都是零. 阶梯形矩阵的秩很容易判断，即

命题 3.13　阶梯形矩阵的秩等于其非零行数.

例如在上面 4 个阶梯形矩阵中，它们的秩分别为 3，3，2，3.

在第一章第四节性质 1.7 后，我们讨论了只应用行列式性质 1.6 和 1.7 就可以将任意一个行列式化简为上三角形行列式的问题. 依据那里的方法，我们完全可以只用初等行变换就可以将任意一个矩阵化为阶梯形矩阵，即

命题 3.14　任意矩阵都可以经过初等行变换化为阶梯形.

命题 3.13 与 3.14 及定理 3.11 向我们提供了一个求矩阵秩的有效方法：先对矩阵做初等行变换将其化为阶梯形，然后判断阶梯形矩阵的秩即确定阶梯形矩阵中非零行的行数，该数即为所求矩阵的秩.

例 3.9　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换化阶梯形：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1,r_3-r_1,r_4-2r_1}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & -4 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-2r_3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

因为最后阶梯形矩阵有两个非零行，它的秩为 2，故 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2.

习　题　A

1. 求向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(4,1,-3,-2),\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(1,2,-3,2),\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(16,9,1,-3)$$

的线性组合 $3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

2. 从以下方程中求向量 $\boldsymbol{\alpha}$

$$3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(2,5,1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(10,1,5,10)$，$\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(4,1,-1,1)$.

3. 求证：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_i,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由这个向量组线性表出.

4. 证明：包含零向量的向量组线性相关.

5. 设有 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$. 证明：若 $\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\alpha}_j\ (i\neq j)$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

6. 判断下列向量组的线性相关性：

(1) $(1,1,0),(0,1,1),(3,0,0)$；

(2) $(2,0),(0,-1)$；

(3) $(4,-5,2,6),(2,-2,1,3),(6,-3,3,9),(4,-1,5,6)$；

(4) $(1,0,0,2,5),(0,1,0,3,4),(0,0,1,4,7),(2,-3,4,11,12)$.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关.

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，问向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$ 是线性相关，还是线性无关？并给出证明.

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,n)$. 证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充分必要条件是 $\det(a_{ij})=0$.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量，已知 n 维标准单位向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 能由它们线性表出，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

11. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量. 证明，它们线性无关的充分必要条件是：任一 n 维向量都可由它们线性表出.

12. 判断下列向量组是否线性相关，并求出一个极大线性无关组.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,2,-1,4),\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(9,100,10,4),\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(-2,-4,2,-8)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(0,2,0),\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(0,0,3)$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,2,1,3),\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(4,-1,-5,-6),\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(1,-3,-4,-7),\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}=(2,1,-1,0)$.

13. 求一个秩是 4 的方阵，它的两个行向量是 $(1,0,3,0,0),(-1,-1,0,0,0)$.

14. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个极大线性无关组.

15. 用初等变换化下列矩阵为阶梯形，并判断其秩.

(1) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$； (2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&1&0&2\\1&5&6&10\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&3&-4&3\\0&4&-7&-1\end{pmatrix}$； (4) $\begin{pmatrix}17&25&31&43\\53&75&94&132\\54&75&94&134\\20&25&32&48\end{pmatrix}$.

16. 证明：两个矩阵和的秩不超过这两个矩阵秩的和，即

$$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$$

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可乘且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，证明：

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant \boldsymbol{A}\text{ 的列数}.$$

习 题 B

1. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$（其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$）线性相关的充要条件是至少有一个 $\boldsymbol{\alpha}_i\ (1<i\leqslant s)$ 可被

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$线性表出.

2. 证明：一个向量组的任一线性无关组都可以扩充为一个极大线性无关组.

3. 已知两向量组有相同的秩，且其中之一可被另一个线性表出. 证明：这两个向量组等价.

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，在其中任取 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{im}$. 证明：$R\{\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{im}\}\geqslant r+m-s$.

5. 设 $n\times m$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r. 证明：存在秩为 r 的 $n\times r$ 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及秩为 r 的 $r\times m$ 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PQ}.$$

第四章　线性方程组

在科学技术以及工程中有许多问题都归结为解线性方程组，在这一章中将讨论线性方程组有解的条件，研究线性方程组解的结构和求解的方法等.

第一节　消　元　法

一、线性方程组

在实际问题中出现的线性方程组有时会含有多个未知数，未知数的个数和方程的个数也未必相等. 因此，线性方程组的一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表示 n 个未知量，m 是方程的个数，a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$表示第 i 个方程中第 j 个未知量 x_j 的系数，称 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$为常数项.

如果 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$，则称(4.1)为齐次线性方程组. 否则，即 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零时，则称它为非齐次线性方程组.

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为线性方程组(4.1)的系数矩阵. 于是

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}, \tag{4.2}$$

它是线性方程组(4.1)的矩阵形式. 矩阵$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})$称为(4.1)的增广矩阵.

如果记

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix},j=1,2,\cdots,n,$$

那么线性方程组(4.1)还有向量的形式：

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}. \tag{4.3}$$

如果用一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 分别代替方程组(4.1)中的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 后，使每个方程都成为恒等式，则 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$ 称为线性方程组(4.1)的一个解向量，简称为(4.1)的一个解.

若 $\boldsymbol{\eta}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组(4.1)解，那么

$$\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{\beta}.$$

也就是

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta},$$

这就是说，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出.

解线性方程组就是求出它的解集合.如果两个方程组有相同的解集合，就称它们是同解的线性方程组.

二、消元法

解线性方程组的方法主要就是对它进行一系列的变换，得到容易求解的，且与原方程组同解的方程组，进而求出其解.

例 4.1 解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=-1,\\x_1+x_2-2x_3=1,\\4x_1-6x_2+2x_3=-6.\end{cases}$$

解 互换第一、第二个方程的位置，以$\frac{1}{2}$乘第三个方程，得

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=1,\\2x_1-x_2-x_3=-1,\\2x_1-3x_2+x_3=-3.\end{cases}$$

第二个方程减去第一个方程的 2 倍，第三个方程减去第一个方程的 2 倍，得

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=1,\\-3x_2+3x_3=-3,\\-5x_2+5x_3=-5.\end{cases}$$

第三个方程减去第二个方程的$\frac{5}{3}$倍，得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ -3x_2 + 3x_3 = -3, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

于是得解

$$\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = x_3 + 1, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

上面所用的解方程组的方法称为消元法.用消元法解线性方程组,实际上是对方程组反复进行下列三种变换:

1. 互换两个方程的位置;
2. 用一个非零数乘某个方程;
3. 将某个方程的倍数加到另一个方程.

这三种变换称为线性方程组的初等变换.容易知道,线性方程组经过初等变换得到的是与之同解的线性方程组.用消元法解线性方程组可以通过对增广矩阵施行初等行变换来完成.例如,例 4.1 的求解过程也就是

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 4 & -6 & 2 & \vdots & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2, \frac{1}{2} r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \vdots & -1 \\ 2 & -3 & 1 & \vdots & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1, r_3 - 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & -3 \\ 0 & -5 & 5 & \vdots & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - \frac{5}{3} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

一般地,用消元法解线性方程组(4.1),不妨设其增广矩阵经初等行变换化为行阶梯形矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & \vdots & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & \vdots & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & \vdots & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

于是,方程组

$$\begin{cases} x_1+c_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n=d_1, \\ x_2+c_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{2n}x_n=d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r+c_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n=d_r, \\ 0=d_{r+1} \end{cases} \tag{4.4}$$

与方程组(4.1)同解，考察方程组(4.4)就可以得到方程组(4.1)解的情况.

当 $d_{r+1}\neq 0$ 时，方程组(4.4)无解，因此(4.1)无解.

当 $d_{r+1}=0$ 时，方程组(4.4)有解，因此(4.1)有解.

由于等价的矩阵有相同的秩，所以当 $d_{r+1}=0$ 时，$R((\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta}))=R(\boldsymbol{A})=r$，当 $d_{r+1}\neq 0$ 时，$R(\boldsymbol{A})=r$，$R((\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta}))=r+1$. 因此有

定理 4.1　线性方程组(4.1)有解的充分必要条件是它的增广矩阵 $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})$ 的秩等于系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

如果方程组(4.4)有解，进一步还可以知道：

当 $r=n$ 时，那么(4.4)有惟一解 $x_1=d_1, x_2=d_2, \cdots, x_n=d_n$. 从而方程组(4.1)有惟一解.

当 $r<n$ 时，将(4.4)改写成

$$\begin{cases} x_1=d_1-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n, \\ x_2=d_2-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=d_r-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n, \end{cases} \tag{4.5}$$

对于 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$(称为自由未知量)任取一组值，代入(4.5)就可以得出确定的 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 的值，于是得到(4.5)的一个解. 用这样办法可以得到(4.5)的任意多个解，所以方程组(4.1)有无穷多个解. 因此有

定理 4.2　n 元线性方程组(4.1)如果有解(也就是 $R((\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta}))=R(\boldsymbol{A})$)，那么当系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r=n$ 时有惟一解，当 $r<n$ 时有无穷多个解.

例 4.2　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ 4x_1+x_2-x_3=-1. \end{cases} \tag{4.6}$$

解　对增广矩阵施行初等行变换，将其化为行阶梯形，得

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & -3 & 1 & \vdots & 0 \\ 4 & 1 & -1 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1,} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -7 & 3 & \vdots & -2 \\ 0 & -7 & 3 & \vdots & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -7 & 3 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -3 \end{pmatrix}.$$

可见系数矩阵的秩是 2,增广矩阵的秩是 3,即 $R((\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta}))\neq R(\boldsymbol{A})$. 因此方程组(4.6)无解.

当方程组有解时,如何求出它的解,解集合具有怎样的结构? 在本章的后两节中将予介绍.

第二节 齐次线性方程组

设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \tag{4.7}$$

容易知道,齐次线性方程组总有解. $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 就是它的一个解,称为零解,其他的解称为非零解. 对于齐次线性方程组,重要的是研究它什么时候有非零解.

一、齐次线性方程组有非零解的条件

用定理 4.2 来讨论 n 元齐次线性方程组,就可以知道:当系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩$r=n$时有惟一解,即只有零解;当 $r<n$ 时有无穷多个解,当然除零解外还有其他的解. 因此有

定理 4.3 n 元齐次线性方程组(4.7)有非零解的充分必要条件是其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})<n$.

二、基础解系

设 $\mathbf{V}$ 是 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 解的全体所成集合,即

$$\mathbf{V}=\{\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n\,|\,\boldsymbol{A\xi}=\mathbf{0}\},$$

这里的 $\mathbf{R}^n$ 表示全体 n 维实向量所成的集合.

当 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\in\mathbf{V}$ 时,有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{A\xi}_1+\boldsymbol{A\xi}_2=\mathbf{0}$. 又若 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{V}$,$k$ 为任意常数,则 $\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\xi})=k(\boldsymbol{A\xi})=\mathbf{0}$. 因此有

定理 4.4 齐次线性方程组的解具有性质:

1. 如果 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\in\mathbf{V}$,那么 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2\in\mathbf{V}$;
2. 如果 $\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{V}$,$k$ 为任意常数,那么 $k\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{V}$.

定理 4.4 是说,齐次线性方程组的两个解的和以及解的倍仍为其解. 由此可知,齐次线性方程组的一些解的线性组合还是它的解. 因此,齐次线性方程组如果有非零解,那么必有无穷多个解. 容易知道,当方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解时,每

个解都可以由向量组 $\boldsymbol{V}$ 的极大线性无关组线性表示. 向量组 $\boldsymbol{V}$ 的极大线性无关组又称为齐次线性方程组的基础解系. 也就是

定义 4.1　向量组 $\boldsymbol{V}$ 的一个极大线性无关组称为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 具体说就是, 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一组解, 如果

(1) $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关;

(2) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任意解都可由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性表出,

那么 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 称为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

如果 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的全部解(通解)为

$$c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\xi}_s, \text{其中 } c_1,c_2,\cdots,c_s \text{ 是任意常数.}$$

也就是

$$\boldsymbol{V}=\{c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{\xi}_s \mid c_1,c_2,\cdots,c_s \text{ 是任意常数}\}.$$

定理 4.5　设有 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$, 如果 $R(\boldsymbol{A})=r<n$, 则它有基础解系, 且基础解系含 $n-r$ 个解向量.

证　设 $R(\boldsymbol{A})=r<n$. 由定理 4.1 的证明, 不失一般性可以设

$$\begin{cases} x_1=-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n, \\ x_2=-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r=-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n \end{cases} \tag{4.8}$$

是与(4.7)同解的方程组. 自由未知量 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 分别取值为:

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

代入到(4.8)中, 依次得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \end{pmatrix}.$$

于是得到方程组(4.8)(也就是(4.7))的 $n-r$ 个解向量:

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\begin{pmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

由于向量组(4.9)线性无关,根据命题 3.2,可知向量组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 也线性无关.

设 $\xi=(c_1,c_2,\cdots,c_r,c_{r+1},c_{r+2},\cdots,c_n)^T$ 是方程组(4.7)的任一解. 根据定理 4.4,可以知道

$$c_{r+1}\xi_1+c_{r+2}\xi_2+\cdots+c_n\xi_{n-r}-\xi$$

是(4.7)的一个解. 于是

$$c_{r+1}\xi_1+c_{r+2}\xi_2+\cdots+c_n\xi_{n-r}-\xi=(d_1,d_2,\cdots,d_r,0,0,\cdots,0)^T$$

也应为方程组(4.8)的解,所以 $d_1=d_2=\cdots=d_r=0$. 因此

$$c_{r+1}\xi_1+c_{r+2}\xi_2+\cdots+c_n\xi_{n-r}-\xi=\mathbf{0},$$

也就是

$$\xi=c_{r+1}\xi_1+c_{r+2}\xi_2+\cdots+c_n\xi_{n-r},$$

即 ξ 能由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表出. 综上所述 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 就是齐次线性方程组(4.7)的一个基础解系. □

例 4.3 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0,\\ 2x_1+x_2+x_3+x_4+4x_5=0,\\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4+6x_5=0,\\ x_1+2x_2-4x_3-4x_4-x_5=0 \end{cases} \tag{4.11}$$

的通解.

解 对系数矩阵施行初等行变换,将其化为行最简形

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&1\\2&1&1&1&4\\4&3&-1&-1&6\\1&2&-4&-4&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-4r_1}}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&1\\0&-1&3&3&2\\0&-1&3&3&2\\0&1&-3&-3&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&1\\0&-1&3&3&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(-1)r_2]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&2&3\\0&1&-3&-3&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

可知,系数矩阵的秩 $R(\mathbf{A})=2$,所以基础解系含有 3 个解向量. 且方程组

$$\begin{cases} x_1=-2x_3-2x_4-3x_5,\\ x_2=\ \ 3x_3+3x_4+2x_5 \end{cases}$$

与原方程组同解. 自由未知量 x_3,x_4,x_5 依次取值 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

所以方程组(4.11)的通解是

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+c_3\boldsymbol{\xi}_3\text{，其中 } c_1,c_2,c_3 \text{ 是任意常数.}$$

例 4.4　λ 为何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=0,\\-x_1+\lambda x_2+5x_3=0,\\x_1+3x_2=0,\\x_1+6x_2+(\lambda+1)x_3=0\end{cases}\tag{4.12}$$

有非零解？并在有非零解时求它的一个基础解系.

解　对系数矩阵施行初等行变换，得

$$\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&\lambda&5\\1&3&0\\1&6&\lambda+1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&\lambda+1&3\\0&2&2\\0&5&\lambda+3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-(\lambda+1)r_2\\r_4-5r_2}]{\substack{\frac{1}{2}r_3\\r_2\leftrightarrow r_3}}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&1\\0&0&2-\lambda\\0&0&\lambda-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&1\\0&0&2-\lambda\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可知当 $\lambda=2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2<3$，所以方程组有非零解. 此时，有与原方程组同解的方程组

$$\begin{cases}x_1=3x_3,\\x_2=-x_3,\end{cases}$$

它的一个基础解系可以为

$$\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

例 4.5　λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+4x_4=0,\\2x_1+x_2+3x_3+5x_4=0,\\x_1-x_2+\lambda x_3-2x_4=0,\\3x_1+x_2+5x_3+(\lambda+3)x_4=0\end{cases}\tag{4.13}$$

有非零解？并在有非零解时求其通解.

解 由于系数矩阵是方阵，故此齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是系数行列式 $\det \boldsymbol{A}=0$. 因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & \lambda & -2 \\ 3 & 1 & 5 & \lambda+3 \end{vmatrix} = -(\lambda-3)^2,$$

所以当 $\lambda=3$ 时，方程组有非零解. 此时

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+r_2]{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是，有同解的方程组

$$\begin{cases} x_1=-2x_3-x_4, \\ x_2=x_3-3x_4. \end{cases}$$

其通解为

$$c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

第三节 非齐次线性方程组

与齐次线性方程组明显不同的是，非齐次线性方程组未必有解，定理 4.1 给出了非齐次线性方程组有解的充要条件. 在这节中将讨论解的结构.

设

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta} \tag{4.14}$$

是非齐次线性方程组，以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}, \tag{4.15}$$

称为(4.14)对应的齐次线性方程组，或(4.14)的导出组.

非齐次线性方程组有解时，其解具有怎样的性质？

定理 4.6　非齐次线性方程组的解具有性质：

1. 非齐次线性方程组(4.14)的任意两个解的差是它的导出组(4.15)的解；

2. 如果 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组(4.14)的解，$\boldsymbol{\xi}$ 是它的导出组(4.15)的解，那么 $\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}$ 是方程组(4.14)的解；

3. 如果 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是非齐次线性方程组(4.14)的某个解，那么(4.14)的任意解 $\boldsymbol{\eta}$ 都可以表示为

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\xi},$$

其中 $\boldsymbol{\xi}$ 是导出组(4.15)的一个解.

证　1. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的两个解. 因为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{A\eta}_1-\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

2. 因为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{A\eta}+\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{\beta},$$

所以 $\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解.

3. 因为

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_0+(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_0),$$

由上面的性质 1 可以知道，$\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_0$ 是导出组(4.15)的解，记 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_0$，即得 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\xi}$. □

定理 4.7　对 n 元非齐次线性方程组(4.14)，设 $R((\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta}))=R(\boldsymbol{A})=r$. 如果 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是它的某个解，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组(4.15)的一个基础解系，那么(4.14)的全部解为

$$\boldsymbol{\eta}_0+c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}. \tag{4.16}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$ 是任意常数.

上式称为非齐次线性方程组(4.14)的通解(或一般解). $\boldsymbol{\eta}_0$ 称为(4.14)的一个特解.

证　由于 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是齐次线性方程组(4.15)的解，根据定理 4.4，它们的线性组合还是(4.15)的解，由定理 4.6 的结论 2 可知，(4.16)必为非齐次线性方程组(4.14)的解.

另一方面，根据定理 4.6 的结论 3 可知，非齐次方程组(4.14)的任意解必能表成(4.16)的形式. □

例 4.6　求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=\ \ 1, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=\ \ 1, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=-2. \end{cases} \tag{4.17}$$

解　对增广矩阵施行初等行变换，得

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-3&1\\3&5&6&-4&1\\4&5&-2&3&-2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-3&1\\0&-1&-6&5&-2\\0&-3&-18&15&-6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1+2r_2]{r_3-3r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-8&7&-3\\0&-1&-6&5&-2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-8&7&-3\\0&1&6&-5&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

可知 $R((\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{\beta}))=R(\boldsymbol{A})=2$，所以非齐次线性方程组(4.17)有解，并且有与(4.17)同解的方程组

$$\begin{cases}x_1=-3+8x_3-7x_4,\\x_2=\ \ 2-6x_3+5x_4.\end{cases}$$

把它写成

$$\begin{cases}x_1=-3+8x_3-7x_4,\\x_2=\ \ 2-6x_3+5x_4,\\x_3=\ \ x_3,\\x_4=\ \ x_4,\end{cases}$$

其中的 x_3,x_4 是自由未知量. 于是方程组(4.17)的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

容易知道，向量 $\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ 是非齐次线性方程组(4.17)的一个特解，向量组 $\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix}$ 是(4.17)的导出组的一个基础解系.

例 4.7　问 a,b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+\ \ x_2+\qquad\qquad x_3+\ x_4=\ \ 0,\\\qquad\ \ x_2+\qquad\ 2x_3+2x_4=\ \ 1,\\\qquad -x_2+(a-3)x_3-2x_4=\ \ b,\\3x_1+\ 2x_2+\qquad\quad x_3+ax_4=-1\end{cases}\tag{4.18}$$

有惟一解,无解,有无穷多解? 并求出有无穷多解时的通解.

解 对线性方程组的增广矩阵施行初等行变换,得

$$(\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1\end{array}\right) \xrightarrow{r_4-3r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0\end{array}\right).$$

由此可知:

当 $a\neq1$ 时,$R(\mathbf{A})=R((\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\beta}))=4$,方程组有惟一解;

当 $a=1,b\neq-1$ 时,$R(\mathbf{A})=2,R((\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\beta}))=3$,方程组无解;

当 $a=1,b=-1$ 时,$R(\mathbf{A})=R((\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\beta}))=2$,方程组有无穷多解. 此时方程组的增广矩阵经初等行变换可以化为

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

由此得到同解的方程组

$$\begin{cases}x_1=-1+x_3+x_4, \\ x_2=1-2x_3-2x_4,\end{cases}$$

它的通解为

$$\begin{pmatrix}-1 \\ 1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1 \\ -2 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1 \\ -2 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix},$$

其中 c_1,c_2 是任意常数.

习 题 A

1. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系:

(1) $\begin{cases}2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+7x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3-3x_4=0, \\ x_2+2x_3+6x_4=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3-x_4=0.\end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0, \\ x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1+3x_2-3x_4=0, \\ x_1-4x_2+3x_3-2x_4=0. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0, \\ 3x_1+x_2+2x_3-7x_4=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0, \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0. \end{cases}$

2. 求下列非齐次线性方程组的通解：

(1) $\begin{cases} x_1-x_3+x_4=2, \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=1, \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=3, \\ 3x_1-x_2+3x_4=5. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2+x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3, \\ x_1-3x_2+2x_3+3x_4=-5. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6, \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3=0. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2-8x_3+7x_4=-1, \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=0. \end{cases}$

3. $a_1,a_2,\cdots,a_5$ 满足什么条件时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2=a_1, \\ x_2-x_3=a_2, \\ x_3-x_4=a_3, \\ x_4-x_5=a_4, \\ x_5-x_1=a_5 \end{cases}$$

有解？在有解时求其解.

4. λ 为何值时？非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$$

(1) 有惟一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解.

5. 问 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda, \\ \lambda x_1-x_2+x_3=4 \end{cases}$$

有惟一解，无解，有无穷多解？求出有无穷多解时的通解.

6. 问 a,b 为何值时？线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=3, \\ 4x_1+7x_2+x_3=10, \\ x_2-x_3=b, \\ 2x_1+3x_2+ax_3=4 \end{cases}$$

有惟一解；无解；有无穷多解. 并在有解时求其解.

7. 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，证明 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1$

也是它的一个基础解系.

8. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的 s 个解，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是一组常数，证明：$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是解的充分必要条件是 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$.

9. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和都等于零，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，求齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 的各列都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

习 题 B

1. 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=0,\\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=0.\end{cases}$$

试讨论 λ 满足何种条件时

(1) 方程组仅有零解？(2) 方程组有非零解？在有非零解时，求出它的一个基础解系.

2. 问 a,b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3=1,\\ 2x_1+(2+a)x_2+2x_3=2,\\ 3x_1+3x_2+(3+a)x_3=3,\\ 4x_1+4x_2+4x_3=4+a\end{cases}$$

无解，有解？在有解时求其解.

3. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{pmatrix}$，问 a,b 取何值时，

(1) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示；

(2) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，并求出表示式.

4. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det\boldsymbol{A}=0$，且 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{kl} 的代数余子式 $A_{kl}\neq 0$，证明 $(A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn})^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，证明

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n.$$

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$R(\boldsymbol{A})=r$，证明存在秩为 $n-r$ 的 $n\times s(n-r\leqslant s)$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的三个解向量，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=3$. 已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix},$$

求此方程组的通解.

8. 已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$R(\boldsymbol{A})=r<n$，证明齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任意 $n-r$ 个线性无关的解都是它的一个基础解系.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明

$$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n,当\ R(\boldsymbol{A})=n;\\1,当\ R(\boldsymbol{A})=n-1;\\0,当\ R(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

11. 证明：向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出的充分必要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 的秩相等. 并利用这个结论给出定理 4.1 的另一个证明.

12. 证明：向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，且表法不惟一的充分必要条件是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 的秩相等，且小于 n. 再利用此结论给出定理 4.2 的另一个证明.

第五章　线性空间与线性变换

线性空间又称为向量空间. 在一定意义上，线性空间是几何空间的推广和抽象. 由于线性空间的理论具有高度的概括性和广泛的应用性，因此它是线性代数的中心内容之一. 这一章中我们将介绍线性空间的概念及其简单的性质，讨论线性空间的基和维数. 介绍线性变换的概念和线性变换的矩阵表示.

第一节　线性空间的概念

一、数域

在讨论数学问题时，经常要强调数的取值范围，很多时候都如同解线性方程组那样，仅仅对数进行四则运算. 为此，引入下面的

定义 5.1　设 K 是一个数集，如果

(1) $0,1\in K$;

(2) 对于任意的 $a,b\in K$，都有 $a+b\in K$，$a-b\in K$，$ab\in K$，且当 $b\neq 0$ 时，$\frac{a}{b}\in K$，那么称 K 是一个数域.

有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、复数集 $\mathbf{C}$ 都是数域，分别称为有理数域、实数域和复数域. 但整数集就不为数域. 除了有理数域、实数域和复数域外，还有

$$\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$$

也是数域. 按照这样，可以构成任意多个数域. 因此，有无穷多个数域. 容易证明，任意数域都包含有理数域.

二、线性空间的定义和例子

几何空间的所有向量(矢量)，实数域上的所有 n 元有序数组 $\mathbf{R}^n$，实数域上的所有 $m\times n$ 矩阵 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 等，尽管这些集合的元素不同，但不难发现它们具有共同的性质. 即，这些集合中的元素都具有各自的加法和与数的乘法两种运算，虽然运算的定义有差异，但是满足相同的运算规律，例如，加法的交换律，结合律，数乘的分配律等. 对这样共同的代数性质加以概括和抽象就得到了线性空间的

定义.

定义 5.2 设 V 是一个非空集合，K 是一个数域. 如果有一个规则，使得对于 V 中的任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，在 V 中有惟一的元素与它们对应，称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，即在 V 中定义了加法运算. 还有一个规则，使得对于 K 中任意数 k 与 V 中的任意元素 $\boldsymbol{\alpha}$，在 V 中有惟一的元素与它们对应，称为 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数量乘积，记为 $k\boldsymbol{\alpha}$，即定义了 V 的元素的数乘运算，并且这两种运算满足如下八条规律：

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$(加法交换律)；

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$(加法结合律)；

(3) V 中有一个元素，记为 $\mathbf{0}$，它使得

$$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha},\ \forall\,\boldsymbol{\alpha}\in \boldsymbol{V},$$

具有这个性质的元素 $\mathbf{0}$ 称为 V 的零元素；

(4) 对于每个 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，存在 $\boldsymbol{\beta}\in \boldsymbol{V}$，使得

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0},$$

具有这个性质的元素 $\boldsymbol{\beta}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素；

(5) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$；

(6) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

(7) $(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$；

(8) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$，$k,l\in K$，则称 V 是数域 K 上的一个线性空间.

数域 K 上的线性空间 V 记成 V_K，在数域明确的情形时也可以简记为 V. 线性空间也称为向量空间，线性空间的元素都称为向量.

例 5.1 数域 K 上所有 n 元有序数组的集合 K^n，对于 n 元有序数组的加法和数量乘法，构成数域 K 上的一个线性空间.

例 5.2 数域 K 上所有 $m\times n$ 矩阵的集合 $K^{m\times n}$，对于矩阵的加法和数与矩阵的乘法，构成数域 K 上的一个线性空间.

例 5.3 实系数齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的全体解所成集合 U，对于解向量的加法和数乘，构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间，称其为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解空间.

例 5.4 数域 K 上所有一元多项式的集合 $K[\boldsymbol{x}]$，对于多项式的加法和数与多项式的乘法，构成数域 K 上的一个线性空间.

例 5.5 数域 K 上所有次数小于 n 的一元多项式的集合 $K[\boldsymbol{x}]_n$ 对于多项式的加法和数与多项式的乘法，构成数域 K 上的一个线性空间.

例 5.6 设 S 是实数域 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集，定义在 S 上的所有函数的集合 $\mathbf{R}^S$，对于函数的加法和数与函数的乘法，构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间.

例 5.7 数域 K 按照数的加法和乘法，构成 K 上的一个线性空间.

设 V 是数域 K 上的一个线性空间. 由线性空间的定义可以得到一些简单的性质.

1. 零向量是惟一的.

假设 $\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2$ 都是 V 的零向量. 因为 $\mathbf{0}_1$ 是零向量，所以

$$\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2.$$

由于 $\mathbf{0}_2$ 是零向量，所以

$$\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_1.$$

于是 $\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2$，因此 V 的零向量是惟一的.

2. 每个向量的负向量是惟一的.

假设 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量. 由 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$，有

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\gamma}+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma})+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}，\text{所以 }\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}.$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

3. $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},k\mathbf{0}=\mathbf{0},\forall k\in K$.

只证明前一等式，后一个留给读者完成. 因为

$$0\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}=0\boldsymbol{\alpha}+1\boldsymbol{\alpha}=(0+1)\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},$$

两边加上 $-\boldsymbol{\alpha}$ 得

$$0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

4. 若 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则 $k=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

当 $k\neq 0$ 时，有

$$\frac{1}{k}(k\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{k}\mathbf{0}=\mathbf{0},$$

还有

$$\frac{1}{k}(k\boldsymbol{\alpha})=\left(\frac{1}{k}k\right)\boldsymbol{\alpha}=1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

三、子空间

线性空间 $K[\boldsymbol{x}]_n$ 是 $K[\boldsymbol{x}]$的子集合，且它们的向量具有相同的加法和数乘运算；实系数 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解空间 U 是线性空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集合，其向量也有同样的运算. 为了表明这样的关系，给出

定义 5.3　设 U 是线性空间 V 的一个非空子集. 如果它对于 V 的加法和数乘两种运算也构成线性空间，那么称 U 是 V 的一个子空间.

容易知道，在线性空间 V 中，仅由零向量组成的集合$\{\mathbf{0}\}$是 V 的一个子空间，称它为零子空间. V 自身也是 V 的一个子空间. 这两个子空间称为 V 的平凡子空间，其他的称为非平凡子空间.

定理 5.1 设 U 是线性空间 V_K 的一个非空子集. 则 U 是 V 的子空间的充分必要条件是它对于 V 的加法和数乘运算是封闭的. 即

1. 如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in U$,那么 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in U$;
2. 如果 $\boldsymbol{\alpha}\in U,k\in K$,那么 $k\boldsymbol{\alpha}\in U$.

证 必要性 由线性空间的定义就可以得到.

充分性 由所设条件知道,V 的加法和数乘也都是 U 的运算. 因为 U 中的元素也在线性空间 V 中,所以 U 的这两个运算能够满足定义 5.2 的运算规律 1),2),5),6),7)和 8). 由于 U 是 V 的非空子集,必有某个 $\boldsymbol{\alpha}\in U$,所以 $0\boldsymbol{\alpha}\in U$,即 $\boldsymbol{0}\in U$. 又当 $\boldsymbol{\alpha}\in U$ 时,由已知条件还可以得,$(-1)\boldsymbol{\alpha}\in U$,即 $-\boldsymbol{\alpha}\in U$. 因此也满足定义 5.2 的运算规律 3)和 4). 综上可知,U 是 K 上的一个线性空间,从而是 V 的一个子空间. □

用此定理不难证明

例 5.8 $K[x]_n$ 是 $K[x]$的一个子空间.

例 5.9 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中的全体对称(反对称、上三角、下三角)矩阵构成它的一个子空间.

例 5.10 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是线性空间 V_K 的一组向量,它们的所有线性组合,记成 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$,即

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid k_1,k_2,\cdots,k_m\in K\}.$$

根据定理 5.1,$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$是 V_K 的一个子空间,称为由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间.

第二节 基 维数 坐标

由线性空间的定义不难知道,线性空间要么仅含零向量,如果含有非零向量,就必有无穷多个向量. 怎样研究有无穷多个元素的线性空间? 元素间的关系是什么? 也就是说要弄清楚线性空间的结构. 再者,能否给出向量的"数量"表示,也就是如何建立起抽象的向量与具体的"数量"之间的联系. 这些是本节要讨论的问题.

一、基 维数 坐标

在讨论 n 元数组时用到了线性表示、线性相关、线性无关等概念,这些概念都可以推广到线性空间中,由这些定义出发所得到的结论在线性空间中也都成立.

定义 5.4 在线性空间 V 中,如果有 n 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,并且任意向量都可以由它们线性表示,那么称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的一组基,n 称为 V

的维数,V 称为 n 维线性空间.

仅含零向量的线性空间的维数是 0. 如果线性空间中有任意多个线性无关的向量,则称其为无限维线性空间. $K[x]$就是一个无限维的线性空间,在线性代数中,只讨论有限维线性空间.

例 5.11 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系就是方程组解空间 U 的基,如果系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,那么 U 是 $n-r$ 维线性空间.

例 5.12 因为 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 是 $K[x]_n$ 中的线性无关向量组,域 K 上任意次数小于 n 的一元多项式都可以由它们线性表示,所以 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 是线性空间 $K[x]_n$ 的一组基,$K[x]_n$ 是 n 维线性空间.

例 5.13 在线性空间 $K^{2\times3}$ 中,因为向量组 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$线性无关,且任意 2×3 矩阵都可以由它们线性表出,所以 $\boldsymbol{E}_{11}$, $\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{13},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22},\boldsymbol{E}_{23}$ 是 $K^{2\times3}$ 的一组基,$K^{2\times3}$ 是 6 维线性空间. 一般地,$K^{m\times n}$ 是 $m\times n$维线性空间.

例 5.14 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大线性无关组是子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$的一组基,因此,$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$的维数等于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩.

容易知道,n 维线性空间中的 n 个线性无关的向量都可以构成它的一组基. 如果 U 是 V 的子空间,那么 U 的维数不大于 V 的维数. 而且有

定理 5.2 设 V 是 n 维线性空间,如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,那么在 V 中必有 $n-m$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\alpha}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\alpha}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基.

证 如果 $m=n$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 就是 V 的一组基. 设 $m<n$,此时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 不是 V 的一组基,那么 V 中有向量不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,譬如 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 是一个这样的向量,于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 线性无关. 如果 $m+1=n$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$ 是 V 的一组基. 如果 $m+1<n$,与上面同样的,应有 $\boldsymbol{\alpha}_{m+2}$ 使得,$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\alpha}_{m+2}$线性无关. 依次下去,就可以得到 n 个线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\alpha}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,它们构成 V 的一组基. □

定理也表明了,子空间的一组基必可以扩充成整个空间的基,因而含有非零向量的线性空间一定存在基. 基的重要性之一是,线性空间的每个向量都可以由它们惟一的线性表示.

定义 5.5 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是线性空间 V_K 的一组基,如果 $\boldsymbol{\xi}\in V_K$ 可以表为

$$\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$为向量$\boldsymbol{\xi}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标.

由于基向量是线性无关的,所以坐标是由向量以及基的选取所惟一确定的.

如果向量$\boldsymbol{\xi}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$下的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,仿照矩阵的乘法,可以"形式"地记为

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

例 5.15　试求线性空间$\mathbf{R}^3$中向量$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$在基

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

下的坐标.

解　设所求的坐标是$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,那么

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=x_1\boldsymbol{\eta}_1+x_2\boldsymbol{\eta}_2+x_3\boldsymbol{\eta}_3,$$

即

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+x_2-x_3=2,\\x_1-x_2-x_3=1.\end{cases}$$

解之得

$$x_1=1,x_2=\frac{1}{2},x_3=-\frac{1}{2}.$$

所以向量$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$在基$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$下的坐标是$\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

例 5.16　线性空间$K[\boldsymbol{x}]_n$中向量$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=a_0+a_1\boldsymbol{x}+a_2\boldsymbol{x}^2+\cdots+a_{n-1}\boldsymbol{x}^{n-1}$在基$1,\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^{n-1}$下的坐标是$(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})^{\mathrm{T}}$,于是

$$f(x)=(1,x,x^2,\cdots,x^{n-1})\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\\vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

二、基变换与坐标变换

如果线性空间有非零向量，那么它就有不同的基.一个向量在两组基下的坐标未必相同，它们的关系是什么？这是下面要讨论的问题.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是线性空间 V_K 的两组基，那么这两个向量组等价.如果

$$\boldsymbol{\beta}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}c_{11}\\c_{21}\\\vdots\\c_{n1}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}c_{12}\\c_{22}\\\vdots\\c_{n2}\end{pmatrix},$$

…………

$$\boldsymbol{\beta}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}c_{1n}\\c_{2n}\\\vdots\\c_{nn}\end{pmatrix},$$

将上述等式合起来，记成矩阵乘法的形式：

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix},$$

简记为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}.$$

定义 5.6 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

过渡矩阵是可逆矩阵.

定理 5.3 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是线性空间 V_K 的两组基. 如果向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在这两组基下的坐标分别为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，那么

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

证 由

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

可以知道，向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，又向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标是 $\boldsymbol{x}$，而向量在一组基下的坐标是惟一的，所以

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}.$$

□

对于例 5.15，我们也可以这样考虑，容易知道向量 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 在基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

下的坐标是 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix},$$

所以 $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

第三节　线 性 变 换

线性变换是线性空间的向量之间重要的，也是最基本的联系，因为它是保持向量线性运算的变换. 这节介绍线性变换的概念，并给出线性变换与矩阵的关系，使得对抽象的线性变换的讨论就显得比较具体了.

一、定义和例子

定义 5.7　设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V_K 到 V_K 的一个映射，且满足 $\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_K$，$\forall k\in K$都有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}),$$

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),$$

那么称 $\mathscr{A}$ 是 V_K 的一个线性变换.

例 5.17　在线性空间 $K^{n\times n}$中，定义

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}\in \boldsymbol{K}^{n\times n},$$

因为 $\forall \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in K^{n\times n}$，$\forall k\in K$ 都有$(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}$，$(k\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，也就是

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\mathscr{A}(\boldsymbol{X})+\mathscr{A}(\boldsymbol{Y}),$$

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{X})=k\mathscr{A}(\boldsymbol{X}),$$

所以 $\mathscr{A}$ 是 $K^{n\times n}$的一个线性变换.

例 5.18　取一 $\boldsymbol{A}\in K^{n\times n}$，在 K^n 中定义

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{A\xi},\boldsymbol{\xi}\in K^n.$$

因为 $\forall \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in K^n$，$\forall k\in K$ 都有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{A\xi}+\boldsymbol{A\eta}$，$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\xi})=k(\boldsymbol{A\xi})$，也就是，

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})+\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}),$$

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{\xi})=k\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}),$$

所以 $\mathscr{A}$ 是线性空间 K^n 的一个线性变换.

例 5.19　在线性空间 $K[x]_n$ 中，求微商的运算，记为 $\mathscr{D}$，即

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}),$$

是一个线性变换.

例 5.20　把线性空间 V 中任意向量都变成零向量的映射是一个线性变换，称为零变换. 把 V 中每个元素都变为本身的映射是一个线性变换，称为恒等变换或单位变换.

设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V_K 的一个线性变换，容易知道

(1) $\mathscr{A}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$;

(2) $\mathscr{A}(-\boldsymbol{\xi})=-\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})$;

(3) $\mathscr{A}(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\xi}_m)=k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_1)+k_2\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_2)+\cdots+k_m\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_m)$.

二、线性变换的矩阵

设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V_K 的一个线性变换，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V_K 的一组基，$\boldsymbol{\xi}\in V_K$. 如果 $\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，那么

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=x_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+x_n\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n).$$

这就是说，$\boldsymbol{\xi}$ 在线性变换 $\mathscr{A}$ 下的像 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})$ 是由基的像 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 所惟一确定. 换言之，如果知道了基的像，那么任意一个向量的像也就清楚了.

设 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)$ 可由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 惟一表示为

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)=a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n,$$

按照形式记法，将上述关系式简记为

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列是向量 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_j)$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标. $\boldsymbol{A}$ 称为线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵.

例 5.21 线性空间 $K[x]_n$ 中，求微商的变换 $\mathscr{D}$ 在基 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

又 $\mathscr{D}$ 在基 $1,x,\frac{x^2}{2!},\cdots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

例 5.22 在线性空间 $K^{2\times 2}$ 中，规定 $\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}\in K^{2\times 2}$，那么 $\mathscr{A}$ 是 $K^{2\times 2}$ 的一个线性变换. 对于基

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

由于

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{11})=\boldsymbol{E}_{11}=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{12})=\boldsymbol{E}_{21}=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{21})=\boldsymbol{E}_{12}=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{E}_{22})=\boldsymbol{E}_{22}=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},$$

所以 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵是

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

定理 5.4 设线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$，向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})$ 在这组基下的坐标是 $\boldsymbol{Ax}$.

证 由假设 $\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，于是

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})&=x_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+x_n\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n)\\&=(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n))\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

这表明 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{Ax}$. □

下面的定理表明了一个线性变换在不同基下的矩阵之间的关系.

定理 5.5 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 的线性变换，如果 $\mathscr{A}$ 在两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}$，其中 $\boldsymbol{C}$ 是由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

证 由假设，有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$
$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}.$$

于是

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)&=\mathscr{A}\left[(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}\right]\\&=\left[\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\right]\boldsymbol{C}\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{AC}\\&=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}.\end{aligned}$$

又

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\boldsymbol{B},$$

由于线性变换在给定基下的矩阵是惟一的，因此 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{AC}$. □

例 5.23 设三维线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix},$$

求 $\mathscr{A}$ 在基

$$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\eta}_2=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

下的矩阵.

解 因为由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix},$$

所以线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 10 & -5\\ 0 & 5 & 10\\ 0 & 10 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 5 & \\ & & -5\end{pmatrix}.$$

第四节　欧几里得空间

几何空间的向量除了线性运算、线性关系外，还有度量性质，如向量的长度、两个向量的夹角等. 在这节中将介绍具有数量积的实线性空间——Euclid 空间，这样的线性空间也具有如同几何空间的度量性质.

一、定义和例子

定义 5.8　设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间，V 上的一个二元实函数，记作$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$，如果它满足：$\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V, k\in\mathbf{R}$，有

(1) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$(对称性)；

(2) $[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}]+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$,
$[k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=k[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$(线性性)；

(3) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时，$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]=0$(正定性)，

则称这个二元实函数$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$是 V 上的内积，定义了内积的实线性空间称为 Euclid 空间.

例 5.24　在 $\mathbf{R}^n$ 中，对 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，规定

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

容易验证$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个内积，称它为 $\mathbf{R}^n$ 上的标准内积，于是，$\mathbf{R}^n$ 成为 Euclid 空间.

没有特别的说明，以下称 $\mathbf{R}^n$ 是 Euclid 空间，其内积都是按上述的定义.

例 5.25　在 $\mathbf{R}^n$ 中，对 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，
规定

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a_1b_1+2a_2b_2+\cdots+na_nb_n.$$

容易验证，这样定义也是一个内积，$\mathbf{R}^n$ 也成为 Euclid 空间. 但它是与例 5.24 不同的 Euclid 空间.

例 5.26　在 $\mathbf{R}[x]_n$ 中，规定

$$[f(x),g(x)]=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

根据定积分的性质，容易验证，$[f(x),g(x)]$是 $\mathbf{R}[x]_n$ 上的一个内积，因此$\mathbf{R}[x]_n$

成为 Euclid 空间.

由于 Euclid 空间具有内积，因而就可以引出向量长、向量的夹角等度量性的概念.

定义 5.9 非负实数$\sqrt{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]}$称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长(或 $\boldsymbol{\alpha}$ 的范数)，记为$|\boldsymbol{\alpha}|$.

容易知道，零向量的长为 0，非零向量的长是正实数. 还有

$$|k\boldsymbol{\alpha}|=|k||\boldsymbol{\alpha}|.$$

长为 1 的向量称为单位向量. 如果 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，则$\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$ 是单位向量.

在欧氏空间 V 中，$\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，都有

$$|[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|$$

等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关. 上式称为 Cauchy - Schwarz 不等式，也称 Cauchy - Буняковский 不等式. 这里略去它的证明.

定义 5.10 在欧氏空间中，两个非零向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的夹角记为$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$，规定为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos\frac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|},0\leqslant\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\leqslant\pi.$$

由此定义可以得出，$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\frac{\pi}{2}$当且仅当$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=0$. 于是，有

定义 5.11 如果$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=0$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交.

例 5.27 在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中求一个单位向量与向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$ 都正交.

解 先求与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 都正交的向量，设为 $\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，那么它应该是方程组

$$\begin{cases}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=x_1+x_2=0,\\ [\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=x_1+2x_3=0\end{cases}$$

的解. 解之，得一个解 $\boldsymbol{\beta}=(-2,2,1)^{\mathrm{T}}$. 将 $\boldsymbol{\beta}$ 单位化得

$$\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}|}\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{3}(-2,2,1)^{\mathrm{T}},$$

它就是与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 都正交的单位向量.

定义 5.12 在 Euclid 空间中，一组两两正交的非零向量称为正交向量组. 由单位向量构成的正交向量组称为规范正交向量组.

向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 为规范正交向量组的充分必要条件是

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j]=\begin{cases}0,\text{当 } i\neq j \text{ 时};\\ 1,\text{当 } i=j \text{ 时}.\end{cases}$$

定理 5.6 正交向量组必线性无关.

证 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是正交向量组，有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}.$$

因为当 $i\neq j$ 时，$[\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j]=0$，所以用 $\boldsymbol{\beta}_i$ 与上式两边做内积，得

$$k_i[\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i]=0.$$

由 $\boldsymbol{\beta}_i\neq\mathbf{0}$，可以知道 $[\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i]>0$，故 $k_i=0, i=1,2,\cdots,m$，因此 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关. □

定理 5.6 表明，在 n 维 Euclid 空间中正交向量组所含向量不能多于 n 个.

容易知道，线性无关的向量组未必是正交向量组.

二、规范正交基

在平面上有两个互相垂直的单位向量，在 Euclid 空间中是否存在由规范正交向量组构成的基？下面的定理给予了肯定的回答.

定理 5.7 在 Euclid 空间中，如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则有规范正交向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 与之等价.

证 先正交化，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_m-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_m]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_m]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{[\boldsymbol{\beta}_{m-1},\boldsymbol{\alpha}_m]}{[\boldsymbol{\beta}_{m-1},\boldsymbol{\beta}_{m-1}]}\boldsymbol{\beta}_{m-1}.$$

容易知道，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 等价. 直接计算可知，当 $i\neq j$ 时，$[\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j]=0$，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 等价的正交向量组.

再将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 单位化，取

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_2|}\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_m|}\boldsymbol{\beta}_m.$$

于是 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 是规范正交向量组，且与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 等价. □

定理 5.7 所用的由线性无关向量组得到规范正交向量组的方法称为 Schimidt 正交化过程.

定义 5.13 在 n 维 Euclid 空间 V 中，有 n 个向量的正交向量组称为 V 的正交基. 由单位向量构成的正交基称为规范正交基.

定理 5.7 也表明，任意非零 Euclid 空间都存在规范正交基.

例 5.28 在线性空间 $\mathbf{R}[x]_3$ 中，内积如例 5.26 所规定的，试求 $\mathbf{R}[x]_3$ 的一组规范正交基.

解 取 $\mathbf{R}[x]_3$ 的一组基，$\boldsymbol{\alpha}_1=1,\boldsymbol{\alpha}_2=x,\boldsymbol{\alpha}_3=x^2$.

正交化，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=x-\frac{\int_{-1}^{1}1\cdot x\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}1\cdot 1\mathrm{d}x}=x,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_3&=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2\\&=x^2-\frac{\int_{-1}^{1}1\cdot x^2\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}1\cdot 1\mathrm{d}x}\cdot 1-\frac{\int_{-1}^{1}x\cdot x^2\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}x\cdot x\mathrm{d}x}\cdot x=x^2-\frac{1}{3},\end{aligned}$$

再将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化，即取

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x}}\cdot 1=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_2|}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x}}\,x=\frac{\sqrt{6}}{2}x,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_3|}\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{d}x}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)=\frac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2-\frac{1}{3}\right),$$

则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 就是 $\mathbf{R}[x]_3$ 的一组规范正交基.

例 5.29　求由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\5\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\3\end{pmatrix}$ 生成子空间 V 的一组规范正交基.

解　经计算，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 V 的一组基.

将向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 正交规范化. 先正交化，取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{6}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_4-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_4]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_4]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2$$

$$=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\3\end{pmatrix}-\frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{-2}{6}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

再把 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化，取

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_2|}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\frac{1}{|\boldsymbol{\beta}_3|}\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 就是 V 的一组规范正交基.

定义 5.14　如果实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$,那么称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

例 5.30　不难验证,如下的矩阵

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$$

都是正交矩阵.

设 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组,由于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 当且仅当

$$\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}=\begin{cases}0,\text{当 } i\neq j \text{ 时};\\1,\text{当 } i=j \text{ 时},\end{cases}\qquad i,j=1,2,\cdots,n.$$

这就是说,n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行(列)向量组是 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组规范正交基.

在 Euclid 空间中，两组规范正交基的过渡矩阵是正交矩阵.

习 题 A

1. 判断下述集合对于所指的运算是否构成实数域上的线性空间.

(1) 所有二次实系数多项式的集合，对于多项式的加法和数与多项式的乘法；

(2) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的所有解向量，对于向量的加法和数与向量的乘法；

(3) 所有 n 阶实可逆矩阵，对于矩阵的加法和数与矩阵的乘法；

(4) 所有三阶实对称矩阵（实反对称矩阵）对于矩阵的加法和数与矩阵的乘法；

(5) 所有与 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ 可交换的矩阵，对于矩阵的加法和数与矩阵的乘法，称矩阵 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换是指 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{AX}$.

2. 求第 1 题中线性空间的一组基和维数.

3. 求由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}5\\1\\-1\\7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\6\\2\\-3\end{pmatrix}$ 生成的子空间的一组基和维数.

4. 下述集合中哪些是 K^n 的子空间：

(1) $V_1=\{(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_2,\cdots,x_n\in K\}$；

(2) $V_2=\{(1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_2,\cdots,x_n\in K\}$；

(3) $V_3=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0,x_1,x_2,\cdots,x_n\in K\}$；

(4) $V_4=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=1,x_1,x_2,\cdots,x_n\in K\}$；

(5) $V_5=\{(x,2x,\cdots,nx)^{\mathrm{T}}\mid x\in K\}$；

(6) $V_6=\{(x,y,\cdots,y)^{\mathrm{T}}\mid x,y\in K\}$.

5. 求第 4 题中的子空间的一组基和维数.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性空间 K^4 的一组基；

(2) 求向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\-5\\0\\4\end{pmatrix}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标.

7. 设 a 是一个实常数，证明 $1,x-a,\cdots,(x-a)^{n-1}$ 是线性空间 $\mathbf{R}[x]_n$ 的一组基，并求向量 $f(x)=1+x+\cdots+x^{n-1}$ 在此基下的坐标.

8. 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

(1) 在 K^3 中求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵；

(2) 求向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$ 在这两组基下的坐标.

9. 下述的映射哪些是线性空间 $K^{2\times2}$ 的线性变换.

(1) $\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$； (2) $\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}+\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$；

(3) $\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$； (4) $\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^*$.

其中 $\boldsymbol{X}\in K^{2\times2}$，$\boldsymbol{X}^*$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的伴随矩阵.

10. 求第 9 题中线性变换在基 $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

11. 求线性空间 K^3 的线性变换

$$\mathscr{A}\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x_1+2x_2\\x_1-x_2\\x_1+x_2+x_3\end{pmatrix}$$

在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

12. 已知

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad 和\quad \boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

是线性空间 $\mathbf{R}^3$ 的两组基. 如果线性变换 $\mathscr{A}$ 使得

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

求

(1) $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵；

(2) $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵.

13. 设三维线性空间 V_K 的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 下的矩阵；

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,k\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵，其中 $k\in K$ 且 $k\neq0$；

(3) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵.

14. 求由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ 生成子空间 V 的一组规范正交基.

15. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}x-x_2+2x_3+x_4=0,\\x_1\qquad-3x_3+5x_4=0,\end{cases}$$

的解空间的一组规范正交基.

16. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵，证明

(1) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是正交矩阵；(2) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正交矩阵；(3) $\boldsymbol{AB}$ 是正交矩阵；(4) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 是正交矩阵.

17. 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维非零列向量，试证明 $\boldsymbol{E}-2\dfrac{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}}$ 是对称的正交矩阵.

18. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵，证明：对任意列向量 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^n$ 都有 $|\boldsymbol{A\alpha}|=|\boldsymbol{\alpha}|$.

习 题 B

1. 判断下述集合对于所指的运算是否构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

(1) 所有正实数的集合 $\mathbf{R}^+$，加法“$\oplus$”和数量乘法“$\circ$”分别规定为

$$a\oplus b=ab,\ \forall\, a,b\in\mathbf{R}^+;\ k\circ a=a^k,\ \forall\, a\in\mathbf{R}^+,k\in\mathbf{R};$$

(2) 平面上不平行于某一非零向量的全体向量所成的集合，对于向量的加法和数乘.

2. 求第 1 题中线性空间的一组基和维数.

3. 证明：如果 n 维线性空间 V 中任意向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基.

4. 证明：在线性空间 V 中，如果任意向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，且有一个向量的表示法是惟一的，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基.

5. 在线性空间 $\mathbf{R}[x]_3$ 中，取 $\boldsymbol{\alpha}_1=1,\boldsymbol{\alpha}_2=1+x,\boldsymbol{\alpha}_3=1+x+x^2$.

(1) 求由基 $1,x,x^2$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵；

(2) 求向量 $3+2x+x^2$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

6. 已知 $\mathbf{R}^3$ 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 使得，

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_1)=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_2)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_3)=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},$$

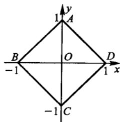
其中 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

7. 说明平面 xOy 上的变换 $\mathscr{A}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 的几何意义，其中

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$；

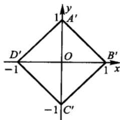
(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$；　　(4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

8. 求 $\mathbf{R}^2$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 使得正方形

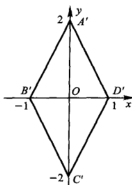


变换成四边形 $A'B'C'D'$.

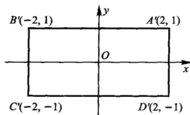
(1)



(2)



(3)



9. 在 $\mathbf{R}^n$ 中，对于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^n$，规定

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶实可逆矩阵，证明$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个内积.

10. 在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^4$ 中求一个单位向量使之与向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}$$

都正交.

11. 设 V 是 n 维 Euclid 空间，取一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$. 令

$$U=\{\boldsymbol{\beta}\in V\mid[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]=0\},$$

(1) 证明:U 是 V 的一个子空间；　(2) 试求 U 的维数.

12. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 为正交矩阵，证明

(1) $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det\boldsymbol{A}=1$ 或 $\det\boldsymbol{A}=-1$；

(2) 当 $\det\boldsymbol{A}=1$ 时，$a_{ij}=A_{ij}$，当 $\det\boldsymbol{A}=-1$ 时，$a_{ij}=-A_{ij}$，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式，$i,j=1,2,\cdots,n$.

13. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵，且 $\det\boldsymbol{A}+\det\boldsymbol{B}=0$，证明 $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=0$.

14. 设 U 是 Euclid 空间 V 的一个子空间，令

$$U^{\perp}=\{\boldsymbol{\beta}\in V\mid[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]=0,\ \forall\,\boldsymbol{\alpha}\in U\},$$

证明 $U^{\perp}$ 是 V 的一个子空间.

15. 设 $U=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，求 $U^{\perp}$ 的一组规范正交基.

16. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，且其每个向量都与非零向量 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

第六章　矩阵的特征值与特征向量

在工程技术中经常要研究震动和稳定性问题，它往往可以归结为讨论方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，当 λ 取何值时有非零解，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵．这也就是本章所要讨论的矩阵的特征值与特征向量．

特征值与特征向量的理论在数学的许多方面，如研究矩阵在相似变换下的标准形，解微分方程组以及把二次曲线（面）的方程化为标准方程等都有着重要的应用．

第一节　矩阵的特征值与特征向量

一、定义和求法

定义 6.1　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵．如果数 λ_0 和 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\xi}$，使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda_0\boldsymbol{\xi}, \tag{6.1}$$

则称 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的一个特征向量．

应该强调的是，特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 一定要求是非零向量．原因是，对任意 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和任意数 λ_0 总有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{0}=\lambda_0\boldsymbol{0}$，这样也就不会有什么“特征”了．

如果 $\boldsymbol{A}$ 是奇异矩阵，那么齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解 $\boldsymbol{\xi}$，使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=0\boldsymbol{\xi},$$

因此，数 0 是奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解都是属于特征值 0 的特征向量．

一般地，当给定 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 时，如何求它的特征值与特征向量呢？首先，我们将(6.1)写成

$$(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0},$$

可知，$\boldsymbol{\xi}$ 是 n 元齐次线性方程组

$$(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{6.2}$$

的非零解，这时应有 $\det(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$．对此，我们引入如下的

定义 6.2　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，λ 是参数，矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的行列式

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix},$$

称为 A 的特征多项式.

于是,A 的特征值 λ_0 是方程

$$\det(\lambda E-A)=0 \tag{6.3}$$

的根(或称为解). 称(6.3)为矩阵 A 的特征方程. 根据以上的讨论,可以得到方阵 A 的特征值与特征向量的求法:

(1) 计算 A 的特征多项式 $\det(\lambda E-A)$.

(2) 求出特征方程 $\det(\lambda E-A)=0$ 的所有根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,它们就是 A 的全部特征值.

(3) 对特征值 λ_i,解齐次线性方程组 $(\lambda_i E-A)x=0$,它的非零解都是属于特征值 λ_i 的特征向量,$i=1,2,\cdots,n$.

例 6.1　求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

解　因为 A 的特征多项式为

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ -4 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda+1),$$

所以 A 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时,解齐次线性方程组 $(3E-A)x=0$,也就是

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

得基础解系 $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$. 于是,$k\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的全部特征向量,其中常数 $k\neq0$.

当 $\lambda_3=-1$ 时,解齐次线性方程组 $(-E-A)x=0$,也就是

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. 于是，$k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_3=-1$ 的全部特征向量，其中常数 $k\neq 0$.

例 6.2　求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 7 & -8 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量.

解　因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-7 & 8 & 0 \\ -4 & \lambda+5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda+1),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时，解齐次线性方程组 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，也就是

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 于是，属于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的全部特征向量是 $k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 k_1，k_2 是任意不全为零的常数.

当 $\lambda_3=-1$ 时，解齐次线性方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，也就是

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 于是，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_3=-1$ 的全部特征向量是 $k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中常数 $k\neq 0$.

例 6.3　设 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵，即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1 或 0.

证　设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\xi}$ 是属于 λ 的特征向量，即

$$\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi},$$

于是

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{A\xi}=\lambda^2\boldsymbol{\xi}.$$

因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，所以 $\lambda^2\boldsymbol{\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$，即 $(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$. 由 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，可知 $\lambda^2-\lambda=0$，因此 $\lambda=1$ 或 $\lambda=0$.

二、特征值与特征向量的性质

用行列式的定义计算 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，其中有一项是主对角线上 n 个元的乘积

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn}),$$

其余项至多含有 $n-2$ 个主对角线上的元素，于是这些项都是 λ 的次数不大于 $n-2$的多项式，所以

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots.$$

令 $\lambda=0$，可知 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$的常数项为 $\det(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(-1)^n\det\boldsymbol{A}$，因此

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\det\boldsymbol{A}. \quad (6.4)$$

因为 n 次方程

$$\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\det\boldsymbol{A}=0$$

在复数域内有 n 个根(重根按重复次数计)，所以 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个特征值. 根据根与系数的关系，可以知道

定理 6.1　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值，那么

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}, \quad (6.5)$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det\boldsymbol{A}. \quad (6.6)$$

定理 6.2　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的互异特征值，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 是分别属于它们的特征向量，那么 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关.

证　对特征值的个数 s 用数学归纳法.

当 $s=1$ 时，由于 $\boldsymbol{\xi}_1\neq\boldsymbol{0}$，而一个非零向量是线性无关的，知定理成立.

假设对 $s-1$ 个互异的特征值，定理成立，要证 s 个互异的特征值对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关. 设有常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s=\boldsymbol{0}. \quad (6.7)$$

因为 $\boldsymbol{A\xi}_i=\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i(i=1,2,\cdots,s)$，以 $\boldsymbol{A}$ 左乘(6.7)式两边，得

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\lambda_s\boldsymbol{\xi}_s=\boldsymbol{0}. \quad (6.8)$$

以 λ_s 乘(6.7)式两边，得

$$k_1\lambda_s\boldsymbol{\xi}_1+k_2\lambda_s\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\lambda_s\boldsymbol{\xi}_s=\boldsymbol{0}. \quad (6.9)$$

(6.8)、(6.9)式相减，有

$$k_1(\lambda_1-\lambda_s)\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\lambda_2-\lambda_s)\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{s-1}(\lambda_{s-1}-\lambda_s)\boldsymbol{\xi}_{s-1}=\mathbf{0}.$$

根据归纳法假设，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{s-1}$线性无关，所以

$$k_1(\lambda_1-\lambda_s)=k_2(\lambda_2-\lambda_s)=\cdots=k_{s-1}(\lambda_{s-1}-\lambda_s)=0.$$

由 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 互异，知 $k_1=0,k_2=0,\cdots,k_{s-1}=0$. 将其代入(6.7)式，得

$$k_s\boldsymbol{\xi}_s=\mathbf{0}.$$

由 $\boldsymbol{\xi}_s\neq\mathbf{0}$，知 $k_s=0$. 因此 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关.

根据归纳法原理，定理得证. □

定理 6.3　设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个互异的特征值，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 分别是属于 λ_1,λ_2 的线性无关的特征向量，那么 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关.

证　设有常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s,l_1,l_2,\cdots,l_t$，使

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s+l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\eta}_t=\mathbf{0}.$$

假设 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s\neq\mathbf{0}$，那么 $l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\eta}_t\neq\mathbf{0}$. 于是，$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$ 是属于特征值λ_1 的特征向量，$l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\eta}_t$ 是属于特征值λ_2 的特征向量，但向量组 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s,l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\eta}_t$ 线性相关，这与定理 6.2 矛盾. 因此

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s=\mathbf{0},l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\eta}_t=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 都是线性无关的，所以 $k_1=0,k_2=0,\cdots,k_s=0,l_1=0,l_2=0,\cdots,l_t=0$. 因此 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关. □

这个定理对于任意多个互异的特征值也是成立的.

第二节　相似矩阵

一、相似矩阵的定义和性质

定义 6.3　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，如果有 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B},$$

那么称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，记为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 的相似变换矩阵.

由定义不难验证，矩阵的相似关系具有：

(i) 反身性：$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$；

(ii) 对称性：若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$；

(iii) 传递性：若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

定理 6.4　相似矩阵有相同的特征多项式，因此也有相同的特征值.

证 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，即有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},$$

于是，

$$\begin{aligned}\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})&=\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\det[\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}]\\&=\det(\boldsymbol{P}^{-1})\cdot\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\cdot\det\boldsymbol{P}\\&=\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\cdot\det\boldsymbol{P}\cdot\det(\boldsymbol{P}^{-1})\\&=\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

□

定理 6.4 的逆命题不成立. 例如矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

的特征多项式都是$(\lambda-1)^2$，但它们不相似.

二、与对角矩阵相似的条件

满足什么条件的矩阵能与对角矩阵相似？下面我们将回答这个问题.

假设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

相似，也就是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)$，其中 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的列向量组，有

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1,\lambda_2\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{\xi}_n),$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i,i=1,2,\cdots,n.$$

因为 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵，所以 $\boldsymbol{P}$ 的 n 个列向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 线性无关. 因此 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$.

反之，假设 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i,i=1,2,\cdots,n$. 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)$，则 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵. 因为

$$AP=(A\xi_1,A\xi_2,\cdots,A\xi_n)=(\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2,\cdots,\lambda_n\xi_n)$$
$$=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$
$$=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

所以

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

即 A 与对角矩阵相似. 这也就是证明了:

定理 6.5 n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

如果 n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似,那么这个对角形矩阵主对角线上的元素就是 A 的 n 个特征值. 因此,如果不计主对角线上元素的次序,则与 A 相似的对角矩阵是惟一的.

例 6.1 的三阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

仅能有两个线性无关的特征向量,因此它不能与对角矩阵相似.

再考察例 6.2 的三阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}7 & -8 & 0\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

由于 $\xi_1=(2,1,0)^T$,$\xi_2=(0,0,1)^T$ 是 A 的属于特征值 3 的两个线性无关的特征向量,$\xi_3=(1,1,0)^T$ 是 A 的属于特征值 -1 的特征向量,根据定理 6.3,向量组 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关. 即这个三阶矩阵有 3 个线性无关的特征向量,因此它能与对角矩阵

$$\begin{pmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & -1\end{pmatrix}$$

相似. 令

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 是把 $\boldsymbol{A}$ 化为对角矩阵的相似变换矩阵. 即

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&-1\end{pmatrix}.$$

由定理 6.2 和 6.5 还可以得到:

推论 如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值,那么 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似.

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$,如果有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵,则称 $\boldsymbol{A}$ 能相似对角化.

例 6.4 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5&-3&0\\6&4&0\\6&3&1\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda+5&3&0\\-6&\lambda-4&0\\-6&-3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$,解齐次线性方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得一个基础解系:

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

即为属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的线性无关的特征向量.

对于特征值 $\lambda_3=-2$,解齐次线性方程组 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得一个基础解系:

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

即为属于 $\lambda_3=-2$ 的线性无关的特征向量.

令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix},$$

即
$$A=P\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}P^{-1}.$$
于是
$$A^{100}=P\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}P^{-1}\cdots P\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}P^{-1}$$
$$=P\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}^{100}P^{-1}=P\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&(-2)^{100}\end{pmatrix}P^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\2&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2^{101}-1&2^{100}-1&0\\-2^{101}+2&-2^{100}+2&0\\-2^{101}+2&-2^{100}+1&1\end{pmatrix}.$$

定理 6.6 设 λ_0 是 n 阶矩阵 A 的 k 重特征值，那么属于 λ_0 的线性无关的特征向量的个数不大于 k.

证 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 是属于特征值 λ_0 的线性无关的特征向量. 那么存在 $n-t$ 个 n 维向量 $\xi_{t+1},\xi_{t+2},\cdots,\xi_n$，使 n 个 n 维列向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t,\xi_{t+1},\xi_{t+2},\cdots,\xi_n$ 线性无关. 令矩阵
$$P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t,\xi_{t+1},\xi_{t+2},\cdots,\xi_n),$$
则 P 是可逆矩阵. 考虑 AP，即
$$AP=(A\xi_1,A\xi_2,\cdots,A\xi_t,A\xi_{t+1},A\xi_{t+2},\cdots,A\xi_n)$$
因为 $A\xi_1=\lambda_0\xi_1,A\xi_2=\lambda_0\xi_2,\cdots,A\xi_t=\lambda_0\xi_t$，且 $A\xi_{t+1},A\xi_{t+2},\cdots,A\xi_n$ 都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t,\xi_{t+1},\xi_{t+2},\cdots,\xi_n$ 线性表出，所以可以令
$$AP=(A\xi_1,A\xi_2,\cdots,A\xi_t,A\xi_{t+1},A\xi_{t+2},\cdots,A\xi_n)$$
$$=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t,\xi_{t+1},\xi_{t+2},\cdots,\xi_n)\left(\begin{array}{cccc:c}\lambda_0&&&&\\&\lambda_0&&&*\\&&\ddots&&\\&&&\lambda_0&\\\hdashline&&O&&B_1\end{array}\right)$$

$$
=P\begin{pmatrix}
\lambda_0 & & & & \\
 & \lambda_0 & & & * \\
 & & \ddots & & \\
 & & & \lambda_0 & \\
 & O & & & B_1
\end{pmatrix},
$$

由此可知 A 与

$$
B=\begin{pmatrix} \lambda_0 E_t & * \\ O & B_1 \end{pmatrix}
$$

相似，其中 E_t 是 t 阶单位矩阵，B_1 是 $n-t$ 阶子块. 于是

$$
\det(\lambda E-A)=\det(\lambda E-B)=(\lambda-\lambda_0)^t\det(\lambda E-B_1),
$$

因此 λ_0 的重数 $k\geqslant t$. □

推论　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 n 阶矩阵 A 的全部互异特征值，其重数依次为 k_1，$k_2,\cdots,k_s$，那么矩阵 A 与对角矩阵相似的充分必要条件是属于 λ_i 的线性无关的特征向量必有 k_i 个，也就是 $R(\lambda_i E-A)=n-k_i,i=1,2,\cdots,s$.

证　由定理知，属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量不多于 k_i 个. 如果每个 λ_i 都有 k_i 个线性无关的特征向量，由于 $k_1+k_2+\cdots+k_n=n$，所以 A 能有 n 个线性无关的特征向量. 因此 A 与对角矩阵相似.

反之，如果有一个特征值 λ_i，使得属于它的线性无关的特征向量少于 k_i 个，那么 A 就不会有 n 个线性无关的特征向量，因此 A 不能与对角矩阵相似.

容易知道，n 阶矩阵 A 的特征值 λ_i 能有 k_i 个线性无关的特征向量，也就是说齐次线性方程组 $(\lambda_i E-A)x=0$ 的基础解系有 k_i 个解，因此 $R(\lambda_i E-A)=n-k_i$.

□

第三节　实对称矩阵的相似对角化

我们已经知道了，并不是任何方阵都能与对角矩阵相似. 在这节里将指出，实对称矩阵必能与实对角矩阵相似，而且相似变换矩阵还可以取为正交矩阵. 为此，先讨论实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.

一、实对称矩阵的特征值和特征向量的性质

设矩阵 $A=(a_{ij})$，用 $\overline{a_{ij}}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数. 记

$$\overline{A}=(\overline{a_{ij}}),$$

称 $\overline{A}$ 为 A 的共轭矩阵. 显然,当 A 为实矩阵时,$\overline{A}=A$. 还容易得到

(1) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

(2) $\overline{\lambda B}=\overline{\lambda}\,\overline{B}$,其中 λ 是常数;

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$;

(4) $\overline{A^{\mathrm{T}}}=\overline{A}^{\mathrm{T}}$.

定理 6.7　实对称矩阵的特征值都是实数.

证　设 λ 是实对称矩阵 A 的特征值,ξ 是属于 λ 的特征向量,即,

$$A\xi=\lambda\xi.$$

以 $\overline{\xi}^{\mathrm{T}}$ 左乘上式得

$$\overline{\xi}^{\mathrm{T}}A\xi=\lambda\overline{\xi}^{\mathrm{T}}\xi.$$

因为 $A^{\mathrm{T}}=A,\overline{A}=A$,所以还有

$$\overline{\xi}^{\mathrm{T}}A\xi=(\overline{\xi}^{\mathrm{T}}\overline{A}^{\mathrm{T}})\xi=(\overline{A\xi})^{\mathrm{T}}\xi=\overline{\lambda}\,\overline{\xi}^{\mathrm{T}}\xi.$$

于是

$$(\lambda-\overline{\lambda})\overline{\xi}^{\mathrm{T}}\xi=0.$$

由于 $\xi\neq\mathbf{0}$,所以实数 $\overline{\xi}^{\mathrm{T}}\xi\neq0$. 因此 $\lambda=\overline{\lambda}$,即 λ 是实数. □

因为属于特征值 λ 的特征向量是齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=\mathbf{0}$ 的非零解,当系数都是实数时,它的解也能是实向量,所以实对称矩阵的特征向量都可以取为实向量.

定理 6.8　实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量是正交的.

证　设 λ_1,λ_2 是实对称矩阵 A 的特征值,ξ_1,ξ_2 分别为属于它们的特征向量. 由 $A\xi_1=\lambda_1\xi_1$,可以得到

$$\xi_2^{\mathrm{T}}A\xi_1=\lambda_1\xi_2^{\mathrm{T}}\xi_1.$$

因为 $A^{\mathrm{T}}=A,A\xi_2=\lambda_2\xi_2$,所以还有

$$\xi_2^{\mathrm{T}}A\xi_1=(\xi_2^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})\xi_1=(A\xi_2)^{\mathrm{T}}\xi_1=(\lambda_2\xi_2)^{\mathrm{T}}\xi_1=\lambda_2\xi_2^{\mathrm{T}}\xi_1.$$

于是 $(\lambda_1-\lambda_2)\xi_2^{\mathrm{T}}\xi_1=0$. 由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$,因此 $\xi_2^{\mathrm{T}}\xi_1=0$,即 ξ_1,ξ_2 正交. □

二、实对称矩阵正交相似于对角矩阵

下面将指出实对称矩阵必可相似对角化,且能与对角矩阵正交相似,即

定理 6.9　设 A 为实对称矩阵,则必有正交矩阵 Q,使 $Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角矩阵.

证　对 A 的阶数 n 作归纳法.

$n=1$,定理结论显然成立.

假设 $n-1$ 时定理的结论成立. 对 n 阶实对称矩阵 A 任取特征值 λ_1 和属于 λ_1 的特征向量 ξ_1,不妨令 ξ_1 是单位向量. 由定理 5.2 和 5.7 知,必有 $n-1$ 个向量 $\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n$,使 n 个向量 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n$ 成为欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 一组规范正交基.

于是,任意向量,特别地 $A\xi_2, A\xi_3, \cdots, A\xi_n$ 都可以由它们线性表出. 设

$$A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n) = (A\xi_1, A\xi_2, A\xi_3, \cdots, A\xi_n)$$
$$= (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B \end{pmatrix}.$$

由于 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组规范正交基,所以矩阵 $Q_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n)$ 是 n 阶正交矩阵,且

$$Q_1^T A Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O & B \end{pmatrix}.$$

再由 $A^T = A$,可以知道 $* = O$,且 B 为是 $n-1$ 阶的实对称矩阵. 于是,

$$Q_1^T A Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

据归纳法假设,有 $n-1$ 阶正交矩阵 P,使

$$P^T B P = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

取 $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & P \end{pmatrix}$,则它是 n 阶正交矩阵,且

$$Q_2^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & O \\ O & B \end{pmatrix} Q_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

所以正交矩阵 $Q = Q_1 Q_2$,使

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

根据归纳法原理,定理得证. □

因为实对称矩阵能与对角矩阵相似,再由定理 6.6 的推论可以得到:

推论　设 λ_0 是实对称矩阵 A 的 k 重特征值,那么属于特征值 λ_0 的线性无关的特征向量恰有 k 个.

三、实对称矩阵正交相似对角化的方法

由于实对称矩阵 A 的 k 重特征值恰有 k 个线性无关的特征向量,属于不同特征值的特征向量是正交的,用正交矩阵化实对称矩阵为对角矩阵,可以按如下

步骤进行：

(1) 由特征多项式 $\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互异的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$.

(2) 对于 k_i 重特征值 λ_i，求出齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ik_i}$，它们是属于 λ_i 的 k_i 个线性无关的特征向量.

(3) 将向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ik_i}$ 规范正交化得 $\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ik_i}$.

(4) 向量组 $\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1k_1},\cdots,\xi_{s1},\xi_{s2},\cdots,\xi_{sk_s}$ 就构成了 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组规范正交基. 令

$$\boldsymbol{Q}=(\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1k_1},\cdots,\xi_{s1},\xi_{s2},\cdots,\xi_{sk_s}),$$

则 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵，且

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1\boldsymbol{E}_{k_1} & & & \\ & \lambda_2\boldsymbol{E}_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s\boldsymbol{E}_{k_s}\end{pmatrix}.$$

例 6.5　设三阶实对称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix},$$

求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵.

解　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned}\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})&=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -4 & -2\\ -4 & \lambda-3 & -2\\ -2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1-\lambda & -2\\ -4 & \lambda+1 & -2\\ -2 & 0 & \lambda\end{vmatrix}\\ &=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & -2\\ -4 & 1 & -2\\ -2 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-7 & 0 & -4\\ -4 & 1 & -2\\ -2 & 0 & \lambda\end{vmatrix}\\ &=(\lambda+1)^2(\lambda-8),\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=8$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，解齐次线性方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得一个基础解系：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交规范化：先正交化，取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 4\end{pmatrix}.$$

再单位化，取

$$\xi_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}.$$

对于特征值 $\lambda_3=8$，解齐次线性方程组 $(8\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得一个基础解系：$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.

单位化，取 $\xi_3=\frac{1}{|\boldsymbol{\alpha}_3|}\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$.

令

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵，且有

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 8\end{pmatrix}.$$

习　题　A

1. 求下列矩阵的特征值和特征向量：

(1) $\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\-3 & -5 & 0\\-3 & -6 & 1\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 2\\0 & -1 & 3 & 3\\0 & 0 & 2 & 5\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$；　(4) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\-2 & 5 & 1\\-3 & 2 & 5\end{pmatrix}$.

2. 上题中的哪些矩阵能与对角矩阵相似？在能与对角矩阵相似时，求出所用的相似变换矩阵和对角矩阵.

3. 试求正交相似变换矩阵，将下列实对称矩阵化为对角矩阵.

(1) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\2 & 2 & 2\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\1 & 3 & -2\\2 & -2 & 0\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix},$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式；

(2) 如果 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，证明$(1,\lambda_0,\lambda_0^2,\lambda_0^3)^{\mathrm{T}}$ 是属于 λ_0 的特征向量.

5. 设 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 -1.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n>1)$ 阶非零矩阵，且有正整数 k 使 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 不能与对角矩阵相似.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的特征值.

8. 设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不等的特征值，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 分别是属于 λ_1,λ_2 的特征向量，证明 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 不为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，证明

(1) $\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{B}$；

(2) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似；

(3) $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\det\boldsymbol{A}\neq0$，证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 相似，证明 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 相似.

12. 证明：n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是它不以 0 为其特征值.

13. 已知 λ 是 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，试确定 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

14. 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=3$，$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是属于特征值 $\lambda_1=6$ 的一个特征向量，求 $\boldsymbol{A}$.

15. 设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-5$，与特征值对应的特征向量分别为 $(1,1)^{\mathrm{T}}$，$(2,-1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$.

16. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似，求 x,y，并求一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{D}$.

17. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$（n 是正整数）.

18. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$（n 是正整数）.

习 题 B

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，且 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}, 2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 都是不可逆矩阵，求行列式 $\det \boldsymbol{A}$.

2. 试构造一个 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，使其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-1$，且有特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2=(2,2,1)^{\mathrm{T}}$.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & x \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与对角矩阵相似，求 x.

4. 设 x 的多项式 $f(x)=c_m x^m+c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_0$，$\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶矩阵，定义

$$f(\boldsymbol{A})=c_m\boldsymbol{A}^m+c_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+c_0\boldsymbol{E}.$$

如果 λ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，证明 $f(\lambda)$ 是矩阵 $f(\boldsymbol{A})$ 的一个特征值.

5. 设 $f(x)$ 是 x 的多项式，若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，证明 $\boldsymbol{P}^{-1}f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=f(\boldsymbol{B})$.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，且有多项式 $f(x)$ 使 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，证明：如果 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，那么 $f(\lambda)=0$.

7. 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 对应的特征向量，$\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵，试求矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的特征值 λ 对应的特征向量.

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

9. 如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和都是零，证明 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，并试求特征值 0 的一个特征向量.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，且 $\det \boldsymbol{A}<0$，证明 -1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

11. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵，证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的非零特征值.

12. 设 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 能与对角矩阵相似.

13. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$，对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$，又向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

(1) 将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性表出；

(2) 求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$（$n$ 为正整数）.

14. 社会调查表明，某地劳动力从业转移情况是：在从事农业生产的人员中每年有 $\frac{3}{4}$ 改为从事非农工作，在非农从业人员中每年有 $\frac{1}{20}$ 改为从事农业生产. 到 2000 年底该地从事农业生产和从事非农工作人员各占全部劳动力的 $\frac{1}{5}$ 和 $\frac{4}{5}$，试预测到 2010 年底该地劳动力从业情况以及经过多年之后该地劳动力从业情况的发展趋势.

第七章　二　次　型

已知 xOy 平面上的一条二次曲线的方程为 $x^2+xy+y^2=1$，因为它不是标准方程，所以很难直接断定它表示的是何种二次曲线. 如果我们作一个线性变换

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}X+\dfrac{1}{\sqrt{2}}Y, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}X+\dfrac{1}{\sqrt{2}}Y, \end{cases}$$

则上述二次曲线的方程可化为标准方程：$\frac{1}{2}X^2+\frac{3}{2}Y^2=1$. 注意这一线性变换是正交变换，其几何意义是坐标轴的旋转. 在正交变换下，向量的长、两向量的夹角都不变，从而曲线的形状也不变. 所以我们可以断定由方程 $x^2+xy+y^2=1$ 所给出的曲线是半轴长分别为$\sqrt{2}$和$\sqrt{6}/3$ 的椭圆. 对于类似的二次曲线方程 $ax^2+bxy+cy^2=1$，可以仿照上述方法判定其类型和形状. 那么如何寻找一个正交变换，使得二次曲线方程化为标准方程呢？这一章我们在更普遍的意义下解决这一问题.

第一节　二次型与合同变换

一、二次型的定义和矩阵表示

定义 7.1　n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+ 2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为一个 n 元二次型，简称二次型. 当系数 a_{ij} 均为实数时称为 n 元实二次型，否则称为 n 元复二次型.

以下仅考虑实二次型. 为方便起见，记 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，其中$a_{ij}=a_{ji}$，则二次型可重新表示为

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+ \\ &\quad \cdots+a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j, \end{aligned}$$

并按矩阵乘法定义可写成：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

如果进一步记 $\boldsymbol{x}=(x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$，

则二次型可写成更为简洁的形式：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\tag{7.1}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 的元素满足 $a_{ij}=a_{ji}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵.

定义 7.2　称式(7.1)为 n 元二次型的矩阵表示，实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 f 的矩阵，f 称为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型.

例 7.1　写出三元二次型 $f=2x_1^2-x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$，并把这个二次型用矩阵表示出来.

解

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&-1&2\\-2&2&1\end{pmatrix},$$

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(x_1\quad x_2\quad x_3)\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&-1&2\\-2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

例 7.2　已知实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$，写出其二次型.

解　$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$.

由以上两例不难看出，$\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素是 f 中平方项的系数，$\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素是 f 中 x_ix_j 项系数的一半.

由 $\boldsymbol{A}$ 的构成方式可见，二次型 f 与其矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一一对应的. 正因为如此，对二次型 f 的研究基本上都可转化为对其矩阵，即实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的研究.

定义 7.3　二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$ 称为二次型 f 的秩.

定义 7.4　仅含平方项的二次型：$f=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$ 称为标准型.

显然，标准形的矩阵为对角阵.

以下，我们给出本章中所要用到的几个概念.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$；$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为两组变量，二者之间的关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

称为从 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的线性变换，其中 c_{ij} 为常数，称为线性变换的系数. n 阶方阵 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ 称为线性变换的系数矩阵. 如果记 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$，则上述线性变换可利用矩阵乘法定义简记为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$. 当 $\boldsymbol{C}$ 为可逆矩阵时，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 称为可逆线性变换，这时逆变换 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}$ 也是线性变换. 当 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵时，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 称为正交变换，正交变换当然是可逆线性变换.

设 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为 n 元二次型，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 为从 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的线性变换，则在此变换下

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},$$

f 成为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的 n 元二次型，且该二次型的矩阵为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

如果进一步设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 为可逆线性变换，则变换前后的二次型有相同的秩，原因是：

$R(\boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}) \leqslant R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}) \leqslant R(\boldsymbol{A})$；而 $R(\boldsymbol{A}) = R[(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}] \leqslant R(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}) \leqslant R(\boldsymbol{B})$，故 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

总之有

定理 7.1 线性变换下，二次型仍变为二次型. 可逆线性变换下，二次型的秩不变.

二、方阵的合同变换

在可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 下，二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，为研究变换前后二次型矩阵的关系，我们给出

定义 7.5 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是合同的，记为 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$. 对方阵 $\boldsymbol{A}$ 的运算 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 称为对 $\boldsymbol{A}$ 的合同变换，并称 $\boldsymbol{C}$ 为把 $\boldsymbol{A}$ 变为 $\boldsymbol{B}$ 的合同变换矩阵.

定理 7.2 矩阵的合同关系满足：

(i) 反身性，即 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{A}$；

(ii) 对称性，即如果 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{A}$；

(iii) 传递性，即如果 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{C}$.

证 (i) 因 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{A}$.

(ii) 如果 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$，则存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，这时 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1} = (\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}$，故 $\boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{A}$.

(iii) 如果 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{C}$，则存在可逆阵 $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$，使 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}_2$. 于

是 $C=D_2^{\mathrm{T}}(D_1^{\mathrm{T}}AD_1)D_2=(D_1D_2)^{\mathrm{T}}A(D_1D_2)$，因 D_1D_2 仍可逆，故 $A\simeq C$. □

注意　由于合同变换矩阵 C 可逆，所以 C 和 C^{T} 都可分解为若干个初等方阵的乘积，从而合同矩阵等阶，且秩相等. 但反过来不一定成立，即等价矩阵不一定合同.

另外，合同关系不一定是相似关系，例如 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$，不难验证，$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}A\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，即 B 与 A 合同，但因 B 与 A 的特征值不同，所以不相似. 后面我们将会看到，相似的实对称矩阵一定合同.

第二节　用正交变换化二次型为标准形

要使 n 元二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=(x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

化为标准形，即

$$(y_1\quad y_2\quad\cdots\quad y_n)\begin{pmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{y},$$

只要寻找适当的可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 把实对称矩阵 A 化为对角阵 Λ，即 $\Lambda=P^{\mathrm{T}}AP$.

由定理 6.9 知：对于实对称矩阵 A，总存在正交阵 P，使 $P^{\mathrm{T}}AP=\Lambda$ 为对角阵. 于是有

定理 7.3　任意 n 元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$ 都可经正交变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{y}$，其中 Λ 的主对角线元素恰为 A 的 n 个特征值.

由此，只要写出二次型 f 的矩阵 A，则用正交变换化 f 为标准形的步骤与实对称矩阵 A 对角化的步骤几乎是一致的.

例 7.3　用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

为标准形，并给出所用的变换式.

解　f 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix},$$

A 的特征多项式

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & -4\\ -2 & 4-\lambda & -2\\ -4 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-5)^2(\lambda+4)$$（注意：$|A-\lambda E|$ 与 $|\lambda E-A|$ 至多差一个符号，对求特征值没有影响）.

A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=5,\lambda_3=-4$.

对于 $\lambda=5$，$A-5E=\begin{pmatrix}-4 & -2 & -4\\ -2 & -1 & -2\\ -4 & -2 & -4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，故对应的特征向量

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

施密特正交化为

$$b_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad b_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix},$$

单位化为

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\2\\-5\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda=-4$，$A+4E=\begin{pmatrix}5 & -2 & -4\\ -2 & 8 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，故对应的特征向量

$$p_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},$$

单位化为

$$e_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

所求正交变换为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$，在这一变换下，$f=5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$.

例 7.4　用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$$

为标准形，并给出所用的变换式.

解　f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1).$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1,\lambda_4=-1$.

对于 $\lambda=0$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故对应的特征向量

$$p_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

p_1, p_2 恰好正交，单位化为

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda=1, A-E=\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故对应的特征向量 $p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化为 $e_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda=-1, A+E=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故对应的特征向量 $p_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化为 $e_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

所求正交变换为 $x=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}y$,在这一变换下,$f=y_3^2-y_4^2$.

例 7.5　用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$$

为标准形,并给出所用的变换式.

解　f 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A 的特征多项式

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-4),$$

A 的特征值　$\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

对于 $\lambda=-2$,$A+2E=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,故对应的特征向量

$p_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,单位化为 $e_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

对于 $\lambda=1$,$A-E=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,故对应的特征向量

$p_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,单位化为 $e_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

对于 $\lambda=4$，$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & -3 & -2\\ 0 & -2 & -4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，故对应的特征向量

$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$，单位化为，$\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$.

所用的正交变换为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$，在这一变换下，$f=-2y_1^2+y_2^2+4y_3^2$.

注：在例 7.3 中，如果用正交变换

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\boldsymbol{y},$$

也可把 f 化为标准形 $5y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$. 在例 7.5 中，如果用正交变换

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\boldsymbol{y},$$

可把 f 化为标准形 $y_1^2-2y_2^2+4y_3^2$. 这说明：化二次型为标准形的正交变换不是惟一的，同时所得标准形也不一定相同.

但是要注意，标准形中各平方项的系数是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，所以，无论用何种正交变换，化成的标准形的形式有何不同，标准形中所含平方项的个数及系数(不计排列次序)是相同的，从而系数中的正数(负数)的个数也是相同的.

第三节　用配方法化二次型为标准形

除了上节介绍的用正交变换化二次型为标准形的方法外，我们还可用其他

方法，即寻找一个一般的可逆线性变换（不一定是正交变换）$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化二次型为标准形. 以下介绍常用的配方法.

设有 n 元二次型

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=a_{11}x_1^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

如果 x_1^2 项系数不为 0，即 $a_{11}\neq 0$，则把所有含 x_1 的项集中起来配成完全平方，配方后其余项中不再含有 x_1. 例如

$$\begin{aligned}f&=x_1^2+3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-6x_2x_3+6x_2x_4-12x_3x_4\\&=[(x_1-x_2+x_3-x_4)^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2+2x_2x_3-2x_2x_4+2x_3x_4]+\\&\quad 3x_2^2-6x_2x_3+6x_2x_4-12x_3x_4\\&=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2+2x_2^2-x_3^2-x_4^2-4x_2x_3+4x_2x_4-10x_3x_4.\end{aligned}$$

因为其余项中 x_2^2 的系数不为 0，再把所有含 x_2 的项集中起来配成完全平方，配方后其余项中不再含有 x_2：

$$\begin{aligned}f&=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2+2(x_2^2-2x_2x_3+2x_2x_4)-x_3^2-x_4^2-10x_3x_4\\&=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2+[2(x_2-x_3+x_4)^2-2x_3^2-2x_4^2+4x_3x_4]-\\&\quad x_3^2-x_4^2-10x_3x_4\\&=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2+2(x_2-x_3+x_4)^2-3x_3^2-3x_4^2-6x_3x_4.\end{aligned}$$

继续这一过程，直到所有项都变成平方项为止：

$$f=(x_1-x_2+x_3-x_4)^2+2(x_2-x_3+x_4)^2-3(x_3+x_4)^2.$$

$$\text{令}\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3-x_4,\\y_2=\qquad x_2-x_3+x_4,\\y_3=\qquad\qquad x_3+x_4,\\y_4=\qquad\qquad\qquad x_4,\end{cases}\quad\text{则}\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\x_2=\qquad y_2+y_3-2y_4,\\x_3=\qquad\qquad y_3-x_4,\\x_4=\qquad\qquad\qquad y_4,\end{cases}\quad\text{或 }\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&-2\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}.$$

在此线性变换下，二次型变为 $f=y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$，成为标准形，所用的变换矩阵 $\boldsymbol{C}$ 显然是可逆矩阵.

如果二次型中不含平方项而仅含交叉乘积项，则需先进行一个可逆线性变换把 f 化为含有平方项的二次型，再用上述方法进一步化为标准形，例如，f 中含有 $2a_{12}x_1x_2$，即 $a_{12}\neq 0$，则先进行线性变换

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2,\\x_2=y_1+y_2,\\x_3=\qquad y_3,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_n=\qquad y_n,\end{cases}\quad\text{即 }\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y},$$

则 $2a_{12}x_1x_2=2a_{12}(y_1-y_2)(y_1+y_2)=2a_{12}y_1^2-2a_{12}y_2^2$，$f$ 成为含有平方项的二次型了.

例如，对于二次型 $f=x_1x_2+x_1x_3-3x_2x_3$，令

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2,\\x_2=y_1+y_2,\\x_3=\qquad\quad y_3,\end{cases}$$

即
$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y},$$

则
$$\begin{aligned}f&=(y_1-y_2)(y_1+y_2)+(y_1-y_2)y_3-3(y_1+y_2)y_3\\&=y_1^2-y_2^2-2y_1y_3-4y_2y_3,\end{aligned}$$
再配方得
$$\begin{aligned}f&=(y_1-y_3)^2-y_3^2-y_2^2-4y_2y_3\\&=(y_1-y_3)^2-[(y_2+2y_3)^2-4y_3^2]-y_3^2\\&=(y_1-y_3)^2-(y_2+2y_3)^2+3y_3^2.\end{aligned}$$

令
$$\begin{cases}z_1=y_1\qquad-y_3,\\z_2=\qquad y_2+2y_3,\\z_3=\qquad\qquad y_3,\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}y_1=z_1\qquad+z_3,\\y_2=\qquad z_2-2z_3,\\y_3=\qquad\qquad z_3,\end{cases}$$

即
$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{z},$$

则 $f=z_1^2-z_2^2+3z_3^2$ 成为标准形.

所用变换为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{z}.$$

它显然是可逆线性变换.

综上所述，用配方法化二次型为标准形的步骤大致为：

二次型中含有平方项 $a_{ii}x_i^2$，则把所有含 x_i 的项集中起来配方.

二次型中不含平方项，而含交叉乘积项 $2a_{ij}x_ix_j$，则先作可逆线性变换

$$\begin{cases}x_i=y_i-y_j,\\x_j=y_i+y_j,\\x_k=y_k\qquad(k\neq i,j),\end{cases}$$

把二次型化为含有平方项的，再进行配方. 最后把两次可逆线性变换复合成一个可逆线性变换.

通过以上讨论可得

定理 7.4 任意实二次型都可经可逆线性变换化为标准形.

推论 任意实对称矩阵都合同于一个对角阵.

例 7.6 用配方法化二次型

$$f=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_3$$

为标准形,并给出所用的可逆变换.

解
$$\begin{aligned} f&=(x_1+x_2-x_3)^2+x_2^2-x_3^2+2x_2x_3\\ &=(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+x_3)^2-2x_3^2. \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2-x_3, \\ y_2=\quad x_2+x_3, \\ y_3=\quad x_3, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2+2y_3, \\ x_2=\quad y_2-y_3, \\ x_3=\quad y_3, \end{cases}$ 即 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$

为所用可逆变换,在这一变换下,标准形为 $f=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.

例 7.7 用配方法化二次型

$$f=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$$

为标准形,并给出所用的可逆变换.

解 令 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2, \\ x_2=y_1+y_2, \\ x_3=\quad y_3, \\ x_4=\quad y_4, \end{cases}$ 即 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$,

则
$$\begin{aligned} f&=y_1^2-y_2^2+(y_1-y_2)y_3+(y_1-y_2)y_4+(y_1+y_2)y_3+(y_1+y_2)y_4+y_3y_4\\ &=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3+2y_1y_4+y_3y_4\\ &=(y_1+y_3+y_4)^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2-y_3y_4\\ &=(y_1+y_3+y_4)^2-y_2^2-\left(y_3+\frac{1}{2}y_4\right)^2-\frac{3}{4}y_4^2. \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1+y_3+y_4, \\ z_2=\quad y_2, \\ z_3=\quad y_3+\frac{1}{2}y_4, \\ z_4=\quad y_4, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} y_1=z_1-z_3-\frac{1}{2}z_4, \\ y_2=\quad z_2, \\ y_3=\quad z_3-\frac{1}{2}z_4, \\ y_4=\quad z_4, \end{cases}$ 即 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{z}$,

二次型的标准形为 $f=z_1^2-z_2^2-z_3^2-\frac{3}{4}z_4^2$,所用的可逆变换为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{z}.$$

应当指出的是，随着配方的方法不同，二次型的标准形和所用的可逆线性变换都不是惟一的.

第四节 正定二次型

一、惯性定理与正定二次型

无论是用正交变换还是一般的可逆线性变换化实二次型为标准形，尽管所用的变换不是惟一的，所得二次型的标准形的形式也不是惟一的，但同一二次型的标准形中所含平方项的个数却是相同的，它等于二次型矩阵的秩，也等于二次型矩阵非零特征值的个数. 同时，标准形中系数为正数的项的个数也是相同的. 实际上，我们有：

定理 7.5(惯性定理)

设有实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其秩为 r. 在不同的可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{z}$ 下，使得 f 变为标准形：

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_r y_r^2 \quad (\lambda_i\neq 0),$$

$$f=\mu_1 z_1^2+\mu_2 z_2^2+\cdots+\mu_r z_r^2 \quad (\mu_i\neq 0),$$

则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 中正数的个数与 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r$ 中正数个数相同.

定义 7.6 f 的标准形中的正系数的个数称为 f 的正惯性指数，负系数的个数称为 f 的负惯性指数.

定义 7.7 设 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为实二次型. 如果对于任意的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，都有 $f>0$，则称 f 为正定二次型，f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定矩阵(可记为 $\boldsymbol{A}>0$)；如果对于任意的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，都有 $f<0$，则称 f 为负定二次型，f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为负定矩阵(可记为 $\boldsymbol{A}<0$).

二、正定二次型(正定矩阵)的判定

定理 7.6 n 元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型的充分必要条件是 f 的标准形中 n 个平方项系数全为正数，即 f 的正惯性指数等于 n.

证 设可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 使 $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2$，如果 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，则对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，故 $f(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2>0$，即 f 正定.

反之，如果 f 正定且有某个 $\lambda_i\leqslant 0$，则取 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}_i$，则 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_i\neq\boldsymbol{0}$. 这时 $f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_i)=\lambda_1 0^2+\lambda_2 0^2+\cdots+\lambda_i 1^2+\cdots+\lambda_n 0^2=\lambda_i\leqslant 0$，与 f 正定矛盾. 可见 $\lambda_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. □

推论　n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值全是正数.

把上述定理和推论中的“正”字改为“负”字，则得到负定二次型和负定矩阵的充分必要条件.

以下我们给出判断实对称矩阵正定或负定的一个更为实用的方法. 为此，先给出

定义 7.8　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 为 n 阶方阵，则行列式

$$\boldsymbol{D}_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个顺序主子式.

由定义可见，方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一个顺序主子式就是 a_{11}，而第 n 个顺序主子式就是 $|\boldsymbol{A}|$.

定理 7.7　n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式都大于零. $\boldsymbol{A}$ 负定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式中奇数阶的小于零而偶数阶的大于零.

例 7.8　判断下列二次型的正定性

(1) $f=6x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$；

(2) $f=-3x_1^2-3x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3$.

解　(1) f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式

$$|6|=6>0,\ \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=6-4=2>0,\ \begin{vmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=30+16+16-16-24-20=2>0,$$

所以由定理 7.7 知 f 是正定二次型.

(2) f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式

$$|-3|=-3<0,\ \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=9-4=5>0,$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}=-36+12+16=-8<0$$

所以由定理 7.7 知 f 是负定二次型.

例 7.9 确定 t 的取值范围,使二次型

$$f=2x_1^2-2tx_1x_2-2tx_1x_3+2x_2^2-2tx_2x_3+2x_3^2$$

为正定二次型.

解 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-t&-t\\-t&2&-t\\-t&-t&2\end{pmatrix}$,显然 $\boldsymbol{A}$ 的第一个顺序主子式 $|2|=2>0$,令 $\boldsymbol{A}$ 的其余顺序主子式都大于 0,即 $\begin{vmatrix}2&-t\\-t&2\end{vmatrix}=4-t^2>0$, $\begin{vmatrix}2&-t&-t\\-t&2&-t\\-t&-t&2\end{vmatrix}=-2(t+2)^2(t-1)>0$. 由此解得 $-2<t<2, t<1$. 总之当 $-2<t<1$ 时,$\boldsymbol{A}$ 正定,从而 f 正定.

例 7.10 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵,证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|>1$.

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 正定,所以 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,从而存在 n 阶正交阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\boldsymbol{O}\\&\ddots&\\\boldsymbol{O}&&\lambda_n\end{pmatrix}$,其中 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值. 这时 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&1+\lambda_n\end{pmatrix}$,于是 $\det[\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}]=\det(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})\cdot\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\cdot\det\boldsymbol{P}=\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=(1+\lambda_1)\cdots(1+\lambda_n)>1$.

例 7.11 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,证明 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

证 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,则存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$. 因为 $(\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}-3\lambda\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}=(\lambda^2-3\lambda+2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$,所以有 $\lambda^2-3\lambda+2=0$,即 $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$. 可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均为正数,即 $\boldsymbol{A}$ 正定.

习 题 A

1. 写出下列二次型的矩阵.

(1) $f=x_1^2+2x_1x_2-x_1x_3+2x_3^2$;

(2) $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$;

(3) $f=2x_1x_2-4x_3x_4$.

2. 用正交变换化下列二次型为标准形，并给出所用的变换.

(1) $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$；

(2) $f=3x_1^2+3x_2^2+6x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$；

(3) $f=2x_1x_2-2x_3x_4$；

(4) $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$.

3. 用配方法化下列二次型为标准形，并给出所用的可逆线性变换.

(1) $f=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_3$；

(2) $f=x_1^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$；

(3) $f=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$；

(4) $f=x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$.

4. 判断下列二次型的正定性.

(1) $f=5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$；

(2) $f=4x_1x_3-2x_1^2-4x_2^2-5x_3^2$.

5. 当 t 取何值时，下列二次型为正定二次型.

(1) $f=5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$；

(2) $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$.

6. 设 $\boldsymbol{U}$ 是可逆矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$，证明 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，证明存在可逆矩阵 $\boldsymbol{U}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$.

8. 证明对称矩阵只能与对称矩阵合同.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{A}$ 合同，则 n 必为偶数.

习 题 B

1. 已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$，经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求 a 的值和正交变换矩阵 $\boldsymbol{P}$.

2. 已知二次型 $f=5x_1^2+5x_2^2+kx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，求 k 的值及 f 的矩阵的特征值.

3. 设二次型 $f=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化为 $f=y_2^2+4y_3^2$，求 a,b 的值及正交变换矩阵 $\boldsymbol{P}$.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，证明：

(1) 若 $\boldsymbol{Q}$ 是初等矩阵，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 是对 $\boldsymbol{A}$ 进行一次初等行变换，再进行一次相同的初等列变换所得的矩阵；

(2) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件是可对 $\boldsymbol{A}$ 的行、列进行相同的初等变换变为 $\boldsymbol{B}$.

5. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 正定，证明 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$ 也正定.

6. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 正定，证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也正定.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵的充要条件为$R(\boldsymbol{B})=n$.

8. 证明实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，当 $|\boldsymbol{x}|=1$ 时的最大值为 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

第八章　空间解析几何

通过建立平面直角坐标系，我们得到了平面上直线和曲线的代数方程，进而研究平面图形的几何性质．这一方法称为坐标法，已为大家所熟知．这一章我们沿用坐标法对空间直线、曲线、平面和曲面加以研究．虽然这可以看成平面解析几何的推广，但也产生了许多新的东西．由于在前几章中我们对 n 维向量及其线性运算已经掌握，所以在本章中引入三维向量作为工具，用它来研究空间几何问题往往更为简捷，这就是所谓的向量法．应当指出，空间解析几何是线性代数的一个最直接的应用，它为许多代数概念提供了几何原型，加深了我们对代数研究对象及其性质的认识，同时也为进一步学习多元函数微积分打下基础．

第一节　空间直角坐标系

一、坐标系的建立

在空间选定一点 O，过 O 作三条两两垂直的直线，给定它们的正向和单位长，使之成为以 O 为原点的数轴，分别称 x 轴，y 轴，z 轴．其正向符合右手法则，即右手四指指向从 x 轴正向逆时针地转到 y 轴正向的方向时，大拇指的方向为 z 轴正向，则得到了如图 8.1 所示的右手空间直角坐标系．其中，O 称为坐标原点，x 轴也称横轴，y 轴也称纵轴，z 轴也称竖轴．x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 平面，y 轴和 z 轴所确定的平面称 yOz 平面，z 轴和 x 轴所确定的平面称 zOx 平面，这三个平面统称坐标面．三个坐标面把整个空间分为八个部分，每一部分称为一个卦限，xOy 平面上方含有三个轴正向的部分为第Ⅰ卦限，其他三个卦限按逆时针方向依次为第Ⅱ，第Ⅲ，第Ⅳ卦限．xOy 平面下方，第Ⅰ卦限之下为第Ⅴ卦限，其余的按逆时针方向依次为第Ⅵ，第Ⅶ，第Ⅷ卦限，如图 8.2.

二、空间点的直角坐标

设 M 为空间任意一点，过 M 分别作 x 轴，y 轴，z 轴的垂直平面，垂足依次为 P,Q,R．设 P,Q,R 在它们各自所在的轴上分别代表实数 x,y,z，则 (x,y,z) 是由点 M 惟一地确定的一个三元有序数组．

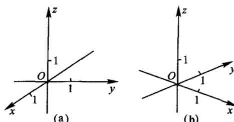


图 8.1

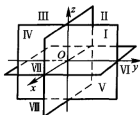


图 8.2

反之,给定一个三元有序数组(x,y,z),分别在x轴,y轴,z轴上找到代表x,y,z的点P,Q,R,过P,Q,R作所在轴的垂直平面,这三个垂直平面的交点M是由三元有序数组(x,y,z)惟一地确定的一点(图 8.3).

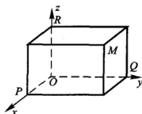


图 8.3

总之,利用空间直角坐标系,我们可以建立空间点和三元有序数组的一一对应关系.我们把与点M对应的三元有序数组(x,y,z)称为点M的空间直角坐标,记为$M(x,y,z)$.其中x,y,z依次称为点M的横坐标、纵坐标和竖坐标.

由点的坐标的定义不难看出,三个坐标全为0的点就是坐标原点O.三个坐标中有两个为0的点一定在坐标轴上,例如$(a,0,0)$为x轴上的点.三个坐标仅有一个为0的点一定在坐标面上,例如$(a,b,0)$为xOy平面上的点.

三、两点间距离公式

设$M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间任意两点,它们的距离d就是线段M_1M_2的长$|M_1M_2|$.下面我们推导d的计算公式.

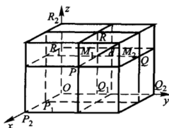


图 8.4

过M_1,M_2作三条轴的垂直平面,这六个平面围成一个以M_1M_2为对角线的长方体,如图 8.4 所示.显然有

$$|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2. \quad (8.1)$$

设过M_1,M_2且与x轴垂直的两平面与x轴交于P_1,P_2,它们在x轴上分别表示实数x_1,x_2,所以$|P_1P_2|=|x_2-x_1|$,于是有$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|$.同理可得$|M_1Q|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|$,$|M_1R|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|$.代入(8.1)得$M_1$,$M_2$的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (8.2)$$

上式称为两点间距离公式，它是平面上两点间距离公式的推广. 特别地，点 $M(x,y,z)$ 到原点 O 的距离

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{8.3}$$

例 8.1 证明以点 $A(1,2,1)$，$B(2,-1,3)$，$C(-1,3,4)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

证 因为 $|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{14}$，

$$|AC|=\sqrt{(-1-1)^2+(3-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{14},$$

$$|BC|=\sqrt{(-1-2)^2+(3+1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{26},$$

所以 $\triangle ABC$ 是以 BC 为底边的等腰三角形.

例 8.2 在 z 轴上求与 $A(3,2,-1)$，$B(6,1,0)$ 距离相等的点.

解 设所求点 M 的坐标为 $(0,0,c)$，则由 $|MA|=|MB|$ 得

$$\sqrt{(3-0)^2+(2-0)^2+(c+1)^2}=\sqrt{(6-0)^2+(1-0)^2+(c-0)^2}$$

去根号得

$$9+4+c^2+2c+1=36+1+c^2,$$

由此解得 $c=\frac{23}{2}$，故所求点的坐标为 $\left(0,0,\frac{23}{2}\right)$.

第二节 几何空间的向量及其线性运算

一、几何向量

在数学和许多自然科学中，经常遇到两类不同性质的量. 其中一类比较简单，当取定测量单位后，可用一个实数来表示，例如立体的体积、曲线的弧长、温度、质量等等，这种只有大小的量称为数量. 另一类比较复杂，它们不但有大小，而且有方向，例如力、力矩、速度、加速度等等. 这种既有大小又有方向的量称为向量或矢量. 在几何学中，数量可以用数轴上的点来表示，而向量可以用有向线段来表示，因为有向线段的长度可用来表示向量的大小，有向线段的方向可用来表示向量的方向. 这种用有向线段来表示的量我们称为几何空间的向量或几何向量，简称向量.

设 A,B 为空间任意两点，如果连接 A,B 的有向线段以 A 为始点，B 为终点，则它表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$. 这就意味着可以用两个大写字母表示一个向量，表示始点的字母在前，表示终点的字母在后. 为简便起见，也可用一个小写字母表示向量，例如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots$. (图 8.5)

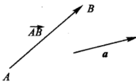


图 8.5

向量的大小，称为向量的长或模. 向量$\overrightarrow{AB}$的长记为$|\overrightarrow{AB}|$，向量 $\boldsymbol{a}$ 的长记为$|\boldsymbol{a}|$. 显然向量的长为非负实数. 向量本身不能比较大小，所以像$\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{CD}$这样的式子没有意义. 但向量的长却有大小之分，所以像$|\overrightarrow{AB}|>|\overrightarrow{CD}|$的式子是有意义的. 长为 0 的向量，即始点与终点重合的向量，称为零向量，记为 $\mathbf{0}$，其方向是任意的. 长为 1 的向量称为单位向量. 以原点为始点，以空间任意一点 M 为终点的向量$\overrightarrow{OM}$称为点 M 的向径，通常记为 $\boldsymbol{r}$. 一个点与其向径是一一对应的，向径的长相等的点分布在以原点为球心的球面之上.

在实际问题中，有的向量与始点的位置有关，例如力. 有的向量与始点的位置无关，例如速度. 在几何中我们仅研究与始点位置无关的向量，即可平移到任何位置的向量，这样的向量称为自由向量，以下简称向量. 在自由向量的意义下，我们可以根据需要把一个向量平移到任何位置.

长度相等，方向相同的两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，即经平移可完全重合的向量，称为相等向量，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等，但方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$.

两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同或方向相反时，称为平行或共线，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 零向量可以认为与任何向量平行.

两个以上的非零向量经平移可落在同一平面上时，称这些向量共面. 零向量可以认为与任何向量共面，平行的向量当然是共面向量.

二、向量的加(减)法

设有非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$为邻边作平行四边形 $ABCD$，如图 8.6，则向量$\overrightarrow{AC}$称为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$. 这种求向量和的方法称为平行四边形法则. 当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 仍与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向，长度等于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 长度之和. 如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中较长的一个同向，长度等于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 长度之差，如图 8.7.

向量的加法也可由与平行四边形法则等价的三角形法则来定义，即把 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 首尾相接，从 $\boldsymbol{a}$ 的首(始点)到 $\boldsymbol{b}$ 的尾(终点)的向量就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 8.8. 三角形法则对于多个向量相加尤为便利，只要把这些向量首尾相接，则从第一个向量的

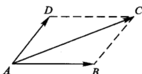


图 8.6

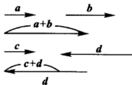


图 8.7

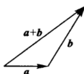


图 8.8

首(始点)到最后一个向量的尾(终点)的向量就是这些向量的和,如图 8.9. 向量的加法满足:

(i) 交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(ii) 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

另外有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

我们规定,从向量 $\boldsymbol{a}$ 减去向量 $\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 加上 $\boldsymbol{b}$ 的负向量,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 如果把 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的始点移到同一点 O,则从 $\boldsymbol{b}$ 的终点到被减向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,如图 8.10. 显然 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.

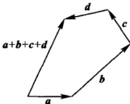


图 8.9

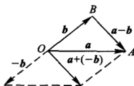


图 8.10

由向量加法的三角形法则不难看出,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

三、向量的乘数运算

设有向量 $\boldsymbol{a}$,实数 λ,则 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积记为 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 仍为向量,其长 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,其方向,当 $\lambda>0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,方向不定. 以上运算称为向量的乘数运算.

向量的乘数运算满足:

(i) 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$,其中 λ,μ 为实数;

(ii) 分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

另外显然有 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

以上定义的向量加(减)法和乘数两种运算统称向量的线性运算. 用向量的线性运算来判定向量的共线与共面,我们有:

定理 8.1 设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量,则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是存在惟一实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 必要性. 如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,取实数 λ,使得 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 同向时 $\lambda>0$,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 反向时 $\lambda<0$. 于是 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,而且 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,所以 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

充分性. 设有实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 则当 $\lambda>0$ 时 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 同向,$\lambda<0$ 时 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 反向,$\lambda=0$ 时 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,总之 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

另一方面，设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$. 两式相减得 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，所以 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$，因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，于是有 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$. 这说明了 λ 的惟一性. □

定理 8.2 如果三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，满足 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

证 当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共线，从而共面. 当 $\boldsymbol{a}\not\parallel\boldsymbol{b}$ 时，如果 $\lambda,\mu>0$，则 $\boldsymbol{c}$ 是以 $\lambda\boldsymbol{a},\mu\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形对角线上的向量，所以 $\lambda\boldsymbol{a},\mu\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，从而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. λ,μ 取其他值时可类似讨论. □

定理 8.3 如果向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，且 $\boldsymbol{a}\not\parallel\boldsymbol{b}$，则一定存在惟一一对实数 λ,μ，使得 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 成立.

证 存在性. 把 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的始点都移到同一点 O 处，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. 过 C 作 $CD/\!/OB$，与 OA 交于 D，因 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，所以有实数 λ 使 $\overrightarrow{OD}=\lambda\boldsymbol{a}$，同理有实数 μ，使 $\overrightarrow{DC}=\mu\boldsymbol{b}$. 因此 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$. 如图 8.11.

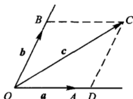


图 8.11

惟一性. 设 $\boldsymbol{c}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}=\lambda_2\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}$，则 $(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{a}+(\mu_1-\mu_2)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{a}\not\parallel\boldsymbol{b}$，所以 $\lambda_1-\lambda_2=\mu_1-\mu_2=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2$，$\mu_1=\mu_2$（否则不妨设 $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$，则 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mu_1-\mu_2}{\lambda_1-\lambda_2}\boldsymbol{b}$，由定理 8.1 有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，与题设矛盾.） □

以上三个定理给出了第三章中两个或三个三维向量线性相关的几何意义. 两个向量共线，三个向量共面，用线性代数语言来表述就是它们线性相关，而不共线，不共面的向量就是线性无关的向量.

四、非零向量的单位化

设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，以实数 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 相乘所得向量记为 $\boldsymbol{a}^0$. 因为 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}>0$，所以 $\boldsymbol{a}^0$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，又因为 $|\boldsymbol{a}^0|=\left|\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}\right|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=1$，所以 $\boldsymbol{a}^0$ 为单位向量. 总之 $\boldsymbol{a}^0$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量.

把一个非零向量乘以它的长的倒数变为与之同向的单位向量的过程称为向量的单位化.

第三节　向量的坐标

设 A 为空间任意一点，u 为空间一条有向直线，称为 u-轴. 过 A 作 u-轴的垂直平面，交 u-轴于点 A'，称 A' 为 A 在 u-轴上的投影. 如图 8.12.

定理 8.4 在 u-轴上取定坐标原点 O，设 A,B 两点在 u-轴上的坐标分别为 u_1,u_2，$\boldsymbol{e}$ 为与 u-轴同向的单位向量，则 $\overrightarrow{AB}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}$.

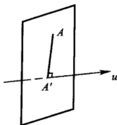


图 8.12

证 当 A,B 重合，即 $u_1=u_2$ 时，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{0}$，$(u_2-u_1)\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}$，则有 $\overrightarrow{AB}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}$；当 A,B 不重合时，如果 $u_2>u_1$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 u-轴，从而与 $\boldsymbol{e}$ 同向，$\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\boldsymbol{e}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}$. 如果 $u_2<u_1$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 u-轴反向，从而与 $-\boldsymbol{e}$ 同向，$\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|(-\boldsymbol{e})=-(u_1-u_2)\boldsymbol{e}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}$. □

一、点 M 的向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标

在 x 轴，y 轴，z 轴上分别取与所在轴同向的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，称之为单位坐标向量. 设 $M(x,y,z)$ 为空间任意一点，过 M 作 xOy 平面垂线，垂足为 M'. 又过 M 作三条轴的垂直平面，垂足依次为 P，Q,R，如图 8.13. 由向量加法、乘数运算的定义及定理 8.4 有

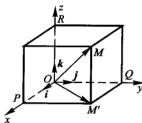


图 8.13

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{8.4}$$

(8.4)称为 $\overrightarrow{OM}$ 按单位坐标向量的分解式，其中 $x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 称为 $\overrightarrow{OM}$ 在三条轴上的分向量，x,y,z 称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标，记为 $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$.

由 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标定义不难看出，空间一点的向径的三个坐标与该点的坐标是一致的. 特别地，单位坐标向量 $\boldsymbol{i}$ 作为点$(1,0,0)$的向径，$\boldsymbol{i}$ 的坐标为$(1,0,0)$，同理 $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$.

二、一般向量的坐标

设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$为空间任意两点，向量

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{8.5}$$

(8.5)称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 按单位坐标向量的分解式，x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1 称为 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标，记为 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. 如果记 $a_x=x_2-x_1,a_y=y_2-y_1,a_z=z_2-z_1$，则 $\overrightarrow{AB}=(a_x,a_y,a_z)$.

通过以上定义可见，向量的坐标等于向量终点与始点对应坐标之差. 特别地，因

为零向量始点和终点重合，所以 $\mathbf{0}=(0,0,0)$. 非零向量的三个坐标一定不全为 0.

三、用坐标进行向量的线性运算

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z);\\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})-(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z);\\ \lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\\&=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).\end{aligned}$$

总之，两个向量相加(减)，只要把对应坐标相加(减). 向量乘数，只要把这个数分别乘到每个坐标之上.

例 8.3　设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)\neq\mathbf{0}$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，证明 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线的充要条件是：

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}. \tag{8.6}$$

证　由定理 8.1 知，在题设下存在惟一实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 用坐标表示为 $(b_x,b_y,b_z)=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$. 所以有 $b_x=\lambda a_x$，$b_y=\lambda a_y$，$b_z=\lambda a_z$，即 $\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$.

注意　当 a_x,a_y,a_z 中有一个为 0，例如 $a_x=0$，$a_y,a_z\neq0$ 时，(8.6)式应理解为 $\begin{cases}b_x=0,\\ \dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}.\end{cases}$ 当 a_x、a_y、a_z 中有两个为 0，例如 $a_x=a_y=0$，而 $a_z\neq0$ 时，(8.6)式应理解为 $\begin{cases}b_x=0,\\ b_y=0.\end{cases}$

设 A，B 为空间任意两点，对于线段 AB 或其延长线上的点 C，如果有 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$，则称 C 分线段 AB 成定比 λ，C 为 AB 的定比分点. 当 $\lambda>0$ 时，C 在线段 AB 上，$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 同向，C 为内分点. 当 $\lambda<0$ 时，C 在 AB 的延长线上，$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 反向，C 为外分点. 当 $\lambda=0$ 时，C 与 A 重合. $\lambda=-1$ 时，$\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CB}$，即 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$，与 A，B 为不同两点矛盾，所以不存在这种情况.

例 8.4　(定比分点公式)

设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，求分 AB 为定比 $\lambda(\lambda\neq-1)$ 的分点 C 的坐标.

解 设 C 的坐标为 (x,y,z)，则 $\overrightarrow{AC}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$，$\overrightarrow{CB}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$. 由 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$ 得 $x-x_1=\lambda(x_2-x)$，$y-y_1=\lambda(y_2-y)$，$z-z_1=\lambda(z_2-z)$. 于是有

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{8.7}$$

(8.7)式称为定比分点公式. 当 $\lambda=1$ 时，C 为 AB 中点，这时有中点公式：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}. \tag{8.8}$$

(8.7)、(8.8)是平面解析几何中定比分点公式和中点公式的推广.

第四节 向量的内积、外积和混合积

一、内积

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，把它们的始点移到同一点 O，记 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则称 $\angle AOB$(指不大于 π 的那一个)为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

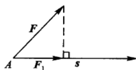


图 8.14

许多问题与向量的长和向量的夹角有关，例如当力 $\boldsymbol{F}$ 使质点 A 产生位移 $\boldsymbol{s}$ 时，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 $W=|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{s}|\cos\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}\rangle$，其中 $\boldsymbol{F}_1$ 是 $\boldsymbol{F}$ 沿 $\boldsymbol{s}$ 方向的分力，如图 8.14. 由此可见功 W 是与力、位移的大小及两者夹角有关的数量.

定义 8.1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个向量，称数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的内积，记为 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$，即

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle, \tag{8.9}$$

因为内积的结果是数量，所以内积也称为数量积.

由定义不难看出，如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有零向量，则其内积为 0. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与自己的内积

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=|\boldsymbol{a}|^2,$$

所以向量的长又可表示为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]}. \tag{8.10}$$

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不是零向量时，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦可表示为

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}. \tag{8.11}$$

上述两式表明，利用向量的内积可以解决有关向量的长与夹角的问题. 例如

力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 可用$[\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}]$来表达.

内积运算满足下列规律：

(i) 交换律：$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]$；

(ii) 结合律：$[(\lambda\boldsymbol{a}),\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{a},(\lambda\boldsymbol{b})]=\lambda[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$，$\lambda$ 为实数；

(iii) 分配律：$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$；

(iv) 正定性：$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]\geqslant 0$，等号当且仅当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时成立.

注意　当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]$仅能得到$[\boldsymbol{a},(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})]=0$，一般不能推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 另外(iii)可推广到有限多个向量和的内积，即

$$[(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_m),(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{b}_n)]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_j],$$

与多项式的乘法运算类似.

定理 8.5　非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 垂直$\left(\text{即夹角为}\dfrac{\pi}{2}\right)$的充分必要条件是$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=0$.

证　充分性. 如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，即$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，则$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\dfrac{\pi}{2}=0$.

必要性. 如果$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=0$，但$|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，则必有 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$，所以$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 垂直. □

例 8.5　对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，证明恒等式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2,$$

并说明其几何意义.

证　如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有零向量，等式显然成立. 以下设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量.

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2&=[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]+[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]\\&=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}]\\&=2[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]+2[\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}]=2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2.\end{aligned}$$

几何意义为平行四边形两条对角线长度的平方和等于各边长度的平方和.

例 8.6　证明三角形三条高交于一点.

证　如图 8.15，设$\triangle ABC$ 的高 BE，CF 交于点 M，连接 AM 并延长交 BC 于 D. 因为 $BE\perp AC$，所以$[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AC}]=0$，而$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}$，于是有$[(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}),\overrightarrow{AC}]=0$，即$[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}]=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$. 又因为 $CF\perp AB$，所以$[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AB}]=0$，同理得$[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}]=[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}]$. 比较上述两式有$[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}]=[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}]$，所以$[\overrightarrow{AM},(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})]=0$，即$[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC}]=0$. 这说明 $AD\perp BC$，即 AD 也是$\triangle ABC$ 的高. 总之三角形三条高交于一点.

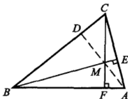


图 8.15

下面我们考虑用向量的坐标计算内积. 设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为三条轴上的单位坐标向量,则由向量长的公式(8.10)和向量垂直的充要条件有

$$[\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}]=|\boldsymbol{i}|^2=1,[\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}]=|\boldsymbol{j}|^2=1,[\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}]=|\boldsymbol{k}|^2=1;[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]=[\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]=[\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}]=0.$$

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]&=[(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}),(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})]\\&=a_xb_x[\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}]+a_yb_y[\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}]+a_zb_z[\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}]+(a_xb_y+a_yb_x)[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]+\\&\quad(a_xb_z+a_zb_x)[\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}]+(a_yb_z+a_zb_y)[\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}],\end{aligned}$$

所以

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{8.12}$$

(8.12)是用坐标计算向量内积的公式,它表明在直角坐标系中向量的内积等于对应坐标乘积之和.

因为$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]=a_xa_x+a_ya_y+a_za_z=a_x^2+a_y^2+a_z^2$,所以有

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{8.13}$$

例 8.7　已知空间三点 $P(2,2,2),A(1,3,2),B(1,2,3)$,求$\angle APB$.

解　因为$\overrightarrow{PA}=(1-2,3-2,2-2)=(-1,1,0),\overrightarrow{PB}=(1-2,2-2,3-2)=(-1,0,1)$,所以$[\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}]=(-1)\times(-1)+1\times0+0\times1=1,|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{2},|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{2}$,这样 $\cos\angle APB=\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\rangle=\dfrac{[\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}]}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{1}{2},\angle APB=\dfrac{\pi}{3}$.

定义 8.2　设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量,$\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴正向的夹角$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}\rangle,\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}\rangle,\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}\rangle$称为$\boldsymbol{a}$ 的三个方向角,记为 α,β,γ. 方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,则由(8.11)式有

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}\rangle=\frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}]}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{i}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\\cos\beta&=\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}\rangle=\frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}]}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{j}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\\\cos\gamma&=\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}\rangle=\frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}]}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{k}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\end{aligned} \tag{8.14}$$

以上为用向量的坐标计算方向余弦进而求出方向角的公式,由此公式可得到方向余弦应满足的恒等式:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{8.15}$$

例 8.8　已知点 $A(1,-1,2),B(4,2,2)$. 求向量$\overrightarrow{AB}$的方向余弦和方向角.

解　$\overrightarrow{AB}=(4-1,2-(-1),2-2)=(3,3,0)$,所以$\overrightarrow{AB}$的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{3^2+3^2+0^2}}=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos\beta=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=0$ 方向角为 $\alpha=\dfrac{\pi}{4},\beta=\dfrac{\pi}{4},\gamma=\dfrac{\pi}{2}$.

二、外积

用两个已知向量来确定第三个向量的运算在实际问题中经常遇到. 例如物理学中,求作用于点 A 的力 $\boldsymbol{F}$ 关于支点 O 的力矩 $\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{M}$ 是一个向量,如图 8.16,$\boldsymbol{M}$ 的大小 $|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{F}_1||\overrightarrow{OA}|=|\boldsymbol{F}||\overrightarrow{OA}|\sin\langle\boldsymbol{F},\overrightarrow{OA}\rangle$,其中 $\boldsymbol{F}_1$ 为 $\boldsymbol{F}$ 沿与 $\overrightarrow{OA}$ 垂直方向的分力. 而 $\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\boldsymbol{F}$,并且 $\overrightarrow{OA}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{M}$ 成右手系,即右手四指指向从 $\overrightarrow{OA}$ 以不超过 π 的角转到 $\boldsymbol{F}$ 的方向时,大拇指的方向为 $\boldsymbol{M}$ 的方向. 注意 $\boldsymbol{M}$ 在由 $\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{F}$ 确定的平面之外. 我们把 $\boldsymbol{M}$ 叫做 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 这两个向量的外积.

定义 8.3 两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的外积,记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,是一个向量. 这个向量的长

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle, \tag{8.16}$$

这个向量的方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都垂直,并且按 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的顺序成右手系,即当右手四指指向从 $\boldsymbol{a}$ 以不超过 π 的转角转向 $\boldsymbol{b}$ 的方向时,大拇指的方向为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向,如图 8.17.

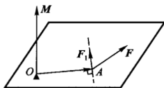


图 8.16

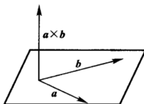


图 8.17

根据这一定义,上述力矩可表示为 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{F}$.

因为外积的结果是向量,所以外积也称为向量积. (8.16)式说明外积的长的几何意义为以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

外积运算满足如下规律:

(i) 反交换律:$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(ii) 结合律:$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$,$\lambda$ 为实数;

(iii) 左分配律:$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,

右分配律:$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

由外积定义可见,$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=0$,所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 当 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 时,即使 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,一般也得不出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 的结论,只能得到 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$. 另外运算规律(iii)可推广为:

$$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_m)\times(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{b}_n)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{b}_j,$$

和多项式乘法运算类似.

定理 8.6 非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证 必要性. 如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 或 π，$\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$，于是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0,\text{即 }\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

充分性. 如果 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，$|\boldsymbol{b}|\neq0$，且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则由 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 得 $\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 或 π，即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. □

例 8.9 证明恒等式 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^2$.

证 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,

$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^2=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(\sin^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+\cos^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$，即 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]^2$.

以下我们讨论用坐标计算外积的方法. 首先考虑单位坐标向量的外积，因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为两两垂直的单位向量，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 成右手系，所以由外积定义不难得到

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+\\&\quad a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

这就是用坐标计算向量外积的公式，为了便于记忆，我们把它表示为一个形式上的三阶行列式，即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}\quad\text{(按第一行展开)}.\tag{8.17}$$

例 8.10 已知空间三点 $M(1,2,4)$，$A(1,1,-1)$，$B(3,1,0)$，求 $\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}$ 及 $\triangle MAB$ 的面积.

解 $\overrightarrow{MA}=(1-1,1-2,-1-4)=(0,-1,-5)$，$\overrightarrow{MB}=(3-1,1-2,0-4)=(2,-1,-4)$，所以

$$\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&-1&-5\\2&-1&-4\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}=(-1,-10,2).$$

又由外积长的几何意义知 $\triangle MAB$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-10)^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{105}.$$

三、混合积

定义 8.4　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为三个向量，先作 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的外积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，再作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的内积，所得数量 $[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\boldsymbol{c}]$ 称为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积，记为 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面时，以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体（如图 8.18）的底面积为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，高 $h=\pm|\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$（当 $\langle\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$ 为锐角时取正号，$\langle\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$ 为钝角时取负号），所以这一平行六面体的体积 $V=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|h=\pm|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\big||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle\big|$，而

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\boldsymbol{c}]=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle,$$

可见 $V=|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$. 总之，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积的绝对值的几何意义是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 由此不难证明：

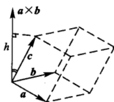


图 8.18

定理 8.7　三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$.

下面我们考虑如何用坐标计算混合积. 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y,-a_xb_z+a_zb_x,a_xb_y-a_yb_x)$，所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})&=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\boldsymbol{c}]=(a_yb_z-a_zb_y)c_x-(a_xb_z-a_zb_x)c_y+(a_xb_y-a_yb_x)c_z\\&=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{8.18}$$

从(8.18)式可见，混合积可由三个向量的坐标组成的三阶行列式求出，这个三阶行列式的第 1,2,3 行元素分别为混合积 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 中第 1,2,3 个向量的坐标. 既然如此，利用行列式的性质不难证明混合积满足以下运算法则：

(i) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$；

(ii) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$；

(iii) $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$；

(iv) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$.

例 8.11　已知空间四点 $A(1,1,1)$，$B(4,4,4)$，$C(3,5,5)$，$D(2,4,7)$，求三棱锥 $A-BCD$ 的体积 V.

解　所求体积是以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 为棱的平行六面体体积的六分之一. 因为 $\overrightarrow{AB}=(3,3,3)$，$\overrightarrow{AC}=(2,4,4)$，$\overrightarrow{AD}=(1,3,6)$，所以

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}3&3&3\\2&4&4\\1&3&6\end{vmatrix}=18.$$

于是 $V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\times 18=3$.

第五节 曲面及其方程

和平面解析几何中把曲线作为满足某个二元方程的动点的轨迹一样，我们把满足某个三元方程的动点的轨迹叫做曲面.

定义 8.5 如果曲面 S 与三元方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{8.19}$$

满足 （i）S 上任意点的坐标都满足(8.19)；

（ii）不在 S 上的点的坐标不满足(8.19)，

则称(8.19)为曲面 S 的方程，而把 S 称为方程(8.19)的图形.

关于曲面的研究包含两类问题，其一是当曲面给出时，如何建立它的方程，其二是给定三元方程时，讨论它所表示的曲面及其性质.

一、球面及其方程

众所周知，球面是到一个定点的距离等于定长的点的轨迹，其中定点称为球心，定长称为球的半径.

例 8.12 求以点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心，以 R 为半径的球面方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为球面上任意一点，则 M 与 M_0 的距离等于半径 R，由两点间距离公式有

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{8.20}$$

因为不在球面上的点一定不满足(8.20)，所以(8.20)就是所求的球面方程.

我们把它叫做球面的标准方程. 从球面的标准方程(8.20)可以看出球心坐标和球的半径. 特别地，当球心为坐标原点时，球面的标准方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{8.21}$$

球面标准方程(8.14)可整理为

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2=0 \tag{8.22}$$

的形式. 这是一个三元二次方程，它仅含平方项而不含交叉乘积项，且平方项的系数相等. 一般地符合上述两个特点的三元二次方程总可经配方化成(8.20)的形式. 所以，形如(8.22)的三元二次方程表示球面. 包括半径为 0 的点球面和半径为复数的虚球面.

例 8.13 把 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+a=0$ 化为球面的标准方程，并就 a

的值对球面加以讨论.

解　配方得标准方程：

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14-a.$$

当 $a<14$ 时，它表示以 $(1,-2,3)$ 为球心，以 $\sqrt{14-a}$ 为半径的球面；当 $a=14$ 时，它表示一点 $(1,-2,3)$，即点球面，当 $a>14$ 时，它表示虚球面，没有图形.

二、旋转曲面及其方程

定义 8.6　一平面曲线 C 绕所在平面上的直线 l 在空间旋转一周所形成的曲面称为旋转曲面，C 称为旋转曲面的母线，l 称为旋转曲面的轴.（图 8.19）

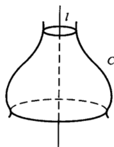


图 8.19

例如，两条平行线中的一条绕另一条旋转形成的圆柱面，两条相交直线一条绕另一条旋转形成的圆锥面，半圆弧绕其所对的直径旋转所形成的球面都是旋转曲面.

下面我们推导旋转曲面的方程.

设 C 为 yOz 平面上的曲线，其方程为

$$f(y,z)=0. \tag{8.23}$$

C 绕 z 轴旋转一周形成的旋转曲面为 S. 又设 $M(x,y,z)$ 为 S 上的任意点，则 M 一定是由母线上一点 M_1 经旋转而来的. 设 M_1 的坐标为 $(0,y_1,z_1)$，则 $z=z_1$，并且 M,M_1 到转轴 z 轴的距离相等，如图 8.20. 用等式表示为

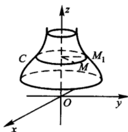


图 8.20

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0^2+y_1^2},\ z=z_1.$$

即

$$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z_1=z. \tag{8.24}$$

因为 M_1 在 C 上，所以 $f(y_1,z_1)=0$. 把(8.24)式代入得

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0. \tag{8.25}$$

这就是 S 上任意一点的坐标满足的方程，不在 S 上的点的坐标不满足(8.25). 这样，我们就得到了以 yOz 面上的曲线 C：$f(y,z)=0$ 为母线，以 z 轴为轴的旋转曲面方程. 当母线在其他坐标面上，转轴为其他坐标轴时可类似讨论，结论如下表所示.

母　线	母线方程	旋转轴	旋转曲面方程
yOz 平面上的曲线	$f(y,z)=0$	z 轴	$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$
		y 轴	$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$
zOx 平面上的曲线	$g(z,x)=0$	z 轴	$g(z,\pm\sqrt{x^2+y^2})=0$
		x 轴	$g(\pm\sqrt{y^2+z^2},x)=0$

续表

母线	母线方程	旋转轴	旋转曲面方程
xOy 平面上的曲线	$h(x,y)=0$	x 轴	$h(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
		y 轴	$h(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$

例 8.14 求以 yOz 平面上的直线 $y=kz$ 为母线，以 z 轴为轴的旋转曲面方程.

解 由上表可见所求旋转曲面方程为 $\pm\sqrt{x^2+y^2}=kz$，即 $x^2+y^2=k^2z^2$，或 $z^2=a^2(x^2+y^2)$，$\left(a^2=\frac{1}{k^2}\right)$.

这一旋转曲面为圆锥面，其顶点在坐标原点. 一般地，顶点在原点，以坐标轴为旋转轴的圆锥面的方程都能够表达为二次齐次函数的形式.

例 8.15 把 zOx 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴，z 轴旋转一周，求所得旋转曲面的方程.

解 绕 x 轴旋转所得旋转曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1. \tag{8.26}$$

绕 z 轴旋转所得旋转曲面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{8.27}$$

这两种曲面都称为旋转椭球面，如图 8.21 所示.

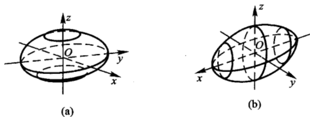


图 8.21

例 8.16 把 xOy 平面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 分别绕 x 轴，y 轴旋转一周，求所得旋转曲面的方程.

解 绕 x 轴旋转所得旋转曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1, \tag{8.28}$$

绕 y 轴旋转所得旋转曲面方程为

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{8.29}$$

其中(8.28)式左边有两个负项，一个正项，它所表示的曲面称为旋转双叶双曲面，如图 8.22 所示.(8.29)式的左边有两个正项，一个负项.它所表示的曲面称为旋转单叶双曲面，如图 8.23 所示.

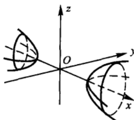


图 8.22

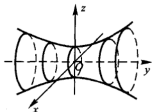


图 8.23

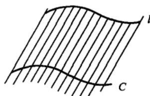


图 8.24

三、柱面及其方程

定义 8.7　一直线 l 沿空间曲线 C 平行移动所形成的曲面称为柱面.l 称为柱面的母线，C 称为柱面的准线.如图 8.24.

例如，与圆 C 所在平面垂直的直线 l 沿 C 平移形成的圆柱面，一直线 l 沿与之相交的另一直线平移形成的平面等都是柱面.

例 8.17　求以 xOy 平面上的圆：$x^2+y^2=a^2$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面 S 的方程.

解　如图 8.25，设 $M(x,y,z)$ 为 S 上的任意一点，M 所在的母线与准线交于 $M_1(x,y,0)$.因 M_1 在准线上，所以有

$$x^2+y^2=a^2. \tag{8.30}$$

这就是 M_1 的坐标，从而也是 M 的坐标满足的等式，不在 S 上的点的坐标不满足(8.30)，所以(8.30)就是所求的柱面方程.虽然方程中仅含两个变量，仍应看成三元方程，缺少变量 z，说明曲面上的点的竖坐标可任意取值.

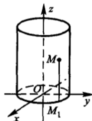


图 8.25

类似地，以 yOz 平面上的圆 $y^2+z^2=a^2$ 为准线，母线平行于 x 轴的圆柱面方程为

$$y^2+z^2=a^2. \tag{8.31}$$

以 zOx 平面上的圆 $x^2+z^2=a^2$ 为准线，母线平行于 y 轴的圆柱面方程为

$$x^2+z^2=a^2. \tag{8.32}$$

它们都应被看成缺少一个变量的三元方程.

反过来说，仅含变量 x,y 而缺少 z 的方程 $F(x,y)=0$，在空间直角坐标系

中表示以 xOy 平面上的曲线 $F(x,y)=0$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面. 仅含变量 x,z 而缺少 y 的方程 $H(x,z)=0$，表示以 zOx 平面上的曲线 $H(x,z)=0$ 为准线，母线平行于 y 轴的柱面，等等.

例如，方程 $y^2=2x$ 在平面直角坐标系中表示抛物线，而在空间直角坐标系中表示以这条 xOy 平面上的抛物线为准线，母线平行于 z 轴的柱面，称为抛物柱面，如图 8.26. 方程 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，在平面直角坐标系中表示椭圆，而在空间直角坐标系中，它表示以 yOz 平面上的这个椭圆为准线，母线平行于 x 轴的柱面，称为椭圆柱面，如图 8.27.

同样，方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 也表示柱面，称为双曲柱面，如图 8.28.

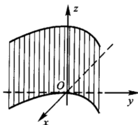


图 8.26

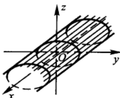


图 8.27

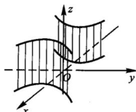


图 8.28

第六节　空间曲线及其方程

一、一般方程

一般说来，通过一条空间曲线的曲面有无穷多个，在其中任选两个，则空间曲线可以看成这两个曲面的交线. 设这两个曲面的方程为 $F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$，则空间曲线上任意一点的坐标同时满足这两个方程，不在空间曲线上的点的坐标不能同时满足这两个方程. 由这两个曲面方程联立所得的三元方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}\tag{8.33}$$

称为空间曲线的一般方程. 显然，一条空间曲线的一般方程不是惟一的.

例 8.18　方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\2x+3z=4\end{cases}$ 表示何种空间曲线?

解　第一个方程表示以 xOy 平面上的单位圆为准线，母线平行于 z 轴的圆柱面，第二个方程表示以 zOx 平面上的直线 $2x+3z=4$ 为准线，母线平行于 y 轴的柱面，实际上是一平面. 方程组所表示的空间曲线是圆柱面与一个平面的交线，是空间的一个椭圆，如图 8.29.

例 8.19　方程组$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4} \end{cases}$表示何种空间曲线？

解　第一个方程表示以原点为球心，以 a 为半径的球面在 xOy 平面上方的部分，称为上半球面. 第二个方程表示以 xOy 平面上的圆 $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$ 为准线，母线平行于 z 轴的圆柱面. 二者的交线如图 8.30 所示.

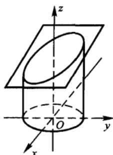


图 8.29

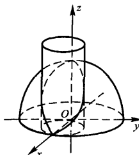


图 8.30

二、参数方程

如果把空间曲线 C 看成动点 M 的轨迹，则 C 上点的坐标都随时间 t 变化而变化，设变化规律为 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)$，则从时刻 $t=\alpha$ 到时刻 $t=\beta$，动点的轨迹，即曲线 C 的方程可写成：

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta), \\ z=\omega(t) \end{cases} \tag{8.34}$$

这一方程称为空间曲线的参数方程，t 称为参数. 注意，空间曲线的参数方程中的参数不一定是时间，随与动点坐标变化有关的变量的不同，它可以有不同的物理意义或几何意义.

例 8.20　设空间一动点 $M(x,y,z)$ 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以匀角速度 ω 绕 z 轴转动，同时 M 沿 z 轴正向作速度为 v 的匀速直线运动. 这时 M 的轨迹称为螺旋线（圆柱螺线）. 试建立螺旋线的参数方程.

解　取时间 t 为参数，且设 $t=0$ 时，动点位于 x 轴上点 $A(a,0,0)$ 处. 经时间

t，动点由 A 移到 $M(x,y,z)$ 处，这时转角 $\theta=\omega t$，上升高度为 vt，所以动点的坐标满足

$$\begin{cases} x=a\cos\omega t, \\ y=a\sin\omega t, \quad (0\leqslant t<+\infty), \\ z=vt \end{cases}$$

这就是所求螺旋线的参数方程，如图 8.31.

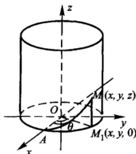


图 8.31

例 8.21　求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^2+y^2=b^2 \end{cases}(a\geqslant b)$ 的参数方程.

解　由所给曲线的一般方程不难看出，曲线是以原点为球心以 a 为半径的球面，与以 xOy 平面上的圆 $x^2+y^2=b^2$ 为准线，母线平行于 z 轴的圆柱面的交线，它在 xOy 平面的两侧各有一部分，都是圆心位于 z 轴上的圆.

因为 $x^2+y^2=b^2$，所以不妨设 $x=b\cos\theta, y=b\sin\theta$，这时由 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 得 $z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\pm\sqrt{a^2-b^2}$，所以所求曲线的参数方程分别为

$$\begin{cases} x=b\cos\theta, \\ y=b\sin\theta, \quad (0\leqslant\theta<2\pi), \\ z=\sqrt{a^2-b^2} \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x=b\cos\theta, \\ y=b\sin\theta, \quad (0\leqslant\theta<2\pi). \\ z=-\sqrt{a^2-b^2} \end{cases}$$

例 8.22　求空间曲线 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \quad (0\leqslant t<2\pi) \\ z=\tan t \end{cases}$ 的一般方程.

解　把 $x=a\cos t, y=a\sin t$ 平方相加得 $x^2+y^2=a^2$，把两式相除得 $z=\dfrac{y}{x}$，即 $y=xz$. 所以所求一般方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ y=xz. \end{cases}$$

三、空间曲线在坐标面上的投影

从空间曲线 C 上的各点作 xOy 平面的垂线，垂足的集合（一般来说是一条曲线）称为 C 在 xOy 平面上的正投影，简称投影. 所作垂线形成柱面，称为 C 向 xOy 平面投影时的投影柱面. 类似地可定义 C 向另外两个坐标面上的投影及投影柱面.

下面我们讨论投影曲线和投影柱面的方程. 设空间曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases} \tag{8.35}$$

从中消去 z 得

$$H(x,y)=0. \tag{8.36}$$

因为 C 上每一点 M 的坐标一定满足(8.35), 所以 M 的前两个坐标一定满足(8.36), 可见 C 在柱面 $H(x,y)=0$ 之上, 这个柱面就是投影柱面. 投影曲线是投影柱面和 xOy 平面的交线, 所以投影曲线方程为

$$\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases} \tag{8.37}$$

应当指出, 空间曲线 C 在 xOy 平面上的投影曲线可能是(8.37)表示的曲线的全部, 也可能仅是一部分, 例如一条线段的投影仍为线段, 但用上述方法求得的投影曲线都是包含这投影线段的直线. 所以, 必要时应对(8.37)式所表示的投影曲线中的变量加以限制, 使得确实表示空间曲线的投影.

同理, 由方程(8.35)消去 x, 得

$$J(y,z)=0,$$

与 yOz 平面的方程 $x=0$ 联立得

$$\begin{cases} J(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases} \tag{8.38}$$

即为 C 向 yOz 平面的投影曲线方程.

由(8.35)消去 y, 得

$$K(x,z)=0,$$

与 zOx 平面的方程 $y=0$ 联立得

$$\begin{cases} K(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases} \tag{8.39}$$

即为 C 向 zOx 平面的投影曲线方程. 当然必要时应对(8.38)、(8.39)中的变量加以限制.

例 8.23 求曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z=2-x^2-y^2 \end{cases}$ 在 xOy 平面和 yOz 平面上的投影曲线方程.

解 所给曲线是以 z 轴为轴的圆锥面和旋转抛物面的交线, 是一个空间圆. 从曲线方程消去 z 得曲线向 xOy 平面投影时的投影柱面方程 $x^2+y^2=1$, 所以曲线在 xOy 平面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=0. \end{cases}$$

这是 xOy 平面上的单位圆.

再由曲线方程消去 x 得曲线向 yOz 平面投影时的投影柱面方程 $z=1$,所以曲线在 yOz 平面上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} z=1, \\ x=0 \end{cases} \quad (-1\leqslant z\leqslant 1).$$

这是 yOz 平面上的一条线段.

例 8.24　求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影方程.

解　所给曲线是两个球面的交线,是一个空间圆.从曲线方程消去 z(从第一个方程减去第二个方程得 $z=1-y$,代入第一个方程)得投影柱面方程 $x^2+2y^2-2y=0$,所以所求投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+2\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}, \\ z=0. \end{cases}$$

这是 xOy 平面上的一个椭圆.

例 8.25　求螺旋线 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=bt \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 在 xOy 平面和 yOz 平面上的投影方程.

解　在所给曲线的参数方程中,把第三个方程改为 $z=0$ 得

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \\ z=0, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=0. \end{cases}$$

这就是螺旋线在 xOy 平面上的投影,它是 xOy 平面上以原点为圆心,a 为半径的圆.同理把第一个方程改为 $x=0$ 得

$$\begin{cases} x=0, \\ y=a\sin t, \\ z=bt, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} y=a\sin\dfrac{z}{b}, \\ x=0 \end{cases} \quad (0\leqslant z\leqslant 2b\pi).$$

这就是螺旋线在 yOz 平面上的投影,它是 yOz 平面上的一段正弦曲线.

例 8.26　求由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$, $z=2-x^2-y^2$ 所围立体在 xOy 平面上的投影区域.

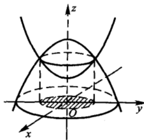


图 8.32

解　如图 8.32 可见,所求投影区域是由两个旋转抛物面的交线在 xOy 平面上的投影曲线围成的.由曲线方程消去 z 得 $x^2+y^2=1$,则所求投影区域可表示为

$$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 1, \\ z=0. \end{cases}$$

即 xOy 平面上的单位圆及其内部.

第七节 平面及其方程

一、平面的点法式方程

我们把与平面 π 垂直的非零向量 $\boldsymbol{n}$ 称为平面 π 的法向量，显然 $\boldsymbol{n}$ 与 π 上任意向量都垂直(如图 8.33). 因为过空间一点有惟一平面与已知直线垂直，所以如果给定平面上一点及平面的法向量，则平面位置就被确定. 以下我们建立过定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，以非零向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法向量的平面方程.

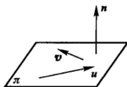


图 8.33

设 $M(x,y,z)$ 为平面 π 上的任意一点，则向量 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直. 由向量垂直的充要条件有

$$[\boldsymbol{n},\overrightarrow{M_0M}]=0, \tag{8.40}$$

用坐标表示为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{8.41}$$

如果 M 不在 π 上，则(8.40)，(8.41)均不成立，所以(8.40)，(8.41)就是平面 π 的方程，称为平面的点法式方程，其中(8.40)是点法式方程向量形式，(8.41)是坐标形式.

例 8.27 求过点 $M_0(1,-2,3)$，且以 $\boldsymbol{n}=(2,-1,4)$ 为法向量的平面方程.

解 所求平面的点法式方程为

$$2(x-1)-(y+2)+4(z-3)=0,$$

即

$$2x-y+4z-16=0.$$

例 8.28 求以两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为端点的线段的垂直平分面方程.

解 所求平面与线段 M_1M_2 垂直，故可取 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ 为法向量. 又所求平面过 M_1M_2 的中点 M_0，而 M_0 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2),\frac{1}{2}(y_1+y_2),\frac{1}{2}(z_1+z_2)\right)$，所以所求垂直平分面的方程可写成

$$(x_2-x_1)\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)+(y_2-y_1)\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)+(z_2-z_1)\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)=0,$$

即 $(x_2-x_1)x+(y_2-y_1)y+(z_2-z_1)z-\frac{1}{2}[(x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)+(z_2^2-z_1^2)]=0.$

二、平面的一般方程

由平面的点法式方程(8.41)整理得

$$Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0,$$

记 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，则平面方程可写成

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{8.42}$$

可见平面方程可化为三元一次方程.

反之，如果给定三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$(A,B,C 不同时为 0)，则任取该方程一组解 x_0,y_0,z_0，即 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$，两者相减得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

可见三元一次方程所表示的图形是过点(x_0,y_0,z_0)且以(A,B,C)为法向量的平面.

总之，三元一次方程的图形就是平面. 我们称 $Ax+By+Cz+D=0$(A,B,C 不全为 0)为平面的一般方程. 注意一般方程中 x,y,z 的系数就是平面法向量的坐标.

在一般方程中，如果 $D=0$，则平面一定经过原点. 如果 $A=0$，即 $By+Cz+D=0$，则法向量 $\boldsymbol{n}=(0,B,C)$显然与 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$垂直，所以平面平行于 x 轴即垂直于 yOz 平面. 同理如果 $B=0$，平面平行于 y 轴即垂直于 zOx 平面；$C=0$，平面平行于 z 轴即垂直于 xOy 平面，如果 $A=B=0$，即 $Cz+D=0$，$z=-\frac{D}{C}$，则平面是 xOy 平面的平行平面，同理，当 $A=C=0$ 时，平面与 zOx 平面平行，当 $B=C=0$ 时，平面与 yOz 平面平行. 特别地 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 分别为 yOz 平面，zOx 平面，xOy 平面的方程.

例 8.29 求过 y 轴和点(3，−4，2)的平面方程.

解 设所求平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，因为它过 y 轴，所以 $B=D=0$，于是 $Ax+Cz=0$. 又因为它过点(3，−4，2)，所以 $3A+2C=0$，即 $A=-\frac{2}{3}C$. 这样所求平面方程变为$-\frac{2}{3}Cx+Cz=0$，消去 C 得 $2x-3z=0$.

三、平面的三点式方程

不在一条直线上的空间三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，$M_3(x_3,y_3,z_3)$确定一个平面. 设 $M(x,y,z)$为这个平面上的任意一点，则向量$\overrightarrow{M_1M}$，$\overrightarrow{M_2M}$，$\overrightarrow{M_3M}$共面. 由三个向量共面的充要条件有其混合积

$$(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{M_3M})=\begin{vmatrix} x_1-x & x_2-x & x_3-x \\ y_1-y & y_2-y & y_3-y \\ z_1-z & z_2-z & z_3-z \end{vmatrix}=0.$$

利用行列式的性质,上式可化为

$$\begin{vmatrix} x & x_1-x & x_2-x & x_3-x \\ y & y_1-y & y_2-y & y_3-y \\ z & z_1-z & z_2-z & z_3-z \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

进一步写成

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

或

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{8.43}$$

(8.43)式称为平面的三点式方程.

例 8.30　求过点 $M_1(1,0,-1)$,$M_2(2,1,1)$,$M_3(3,3,-2)$的平面方程.

解一　设 $M(x,y,z)$为所求平面上的任意一点,则由三点式方程有

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

展开得所求平面方程 $7x-5y-z-8=0$.

解二　设所求平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$,因为它过 M_1,M_2,M_3 点,所以有

$$\begin{cases} A \qquad\quad -C+D=0, \\ 2A\ +B\ +C+D=0, \\ 3A+3B-2C+D=0, \end{cases}$$

由此解得 $A=-\frac{7}{8}D$,$B=\frac{5}{8}D$,$C=\frac{1}{8}D$.

于是所求平面方程为$-\frac{7}{8}Dx+\frac{5}{8}Dy+\frac{1}{8}Dz+D=0$,即 $7x-5y-z-8=0$.

例 8.31 求过坐标轴上的三点 $A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$的平面方程，其中 a,b,c 均不为 0.

解 由三点式方程得所求平面方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix}=0,$$

展开得
$$bcx+acy+abz-abc=0,$$

即
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{8.44}$$

(8.44)称为平面的截距式方程，a,b,c 称为平面在 x 轴，y 轴，z 轴上的截距.

四、两个平面的夹角

规定两个平面的夹角为其法向量所夹的锐角，设平面 π_1,π_2 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，则 π_1,π_2 的夹角 θ 为$\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$，$\pi-\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$中的锐角. 这样，$\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|$，即

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{8.45}$$

该式称为两平面夹角公式.

例 8.32 求平面 $x-y+2z-6=0$ 与 $2x+y+z-5=0$ 的夹角 θ.

解 $\cos\theta=\dfrac{|1\times2+(-1)\times1+2\times1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}$，故 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，两个平面垂直. 由(8.45)可得：

两个平面 $A_ix+B_iy+C_iy+D_i=0(i=1,2)$垂直的充分必要条件为

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

当 $\theta=0$ 时，两个平面平行或重合，这时它们的法向量平行，所以有

两个平面 $A_ix+B_iy+C_iy+D_i=0(i=1,2)$平行的充分必要条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}.$$

两个平面重合的充分必要条件为

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

例 8.33 求与已知平面 $x+2y-z+1=0$ 垂直且过点 $M_1(4,0,3)$，$M_2(-1,-1,1)$的平面方程.

解 设所求平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，它与已知平面垂直，所以有

$A+2B-C=0$. 它过 M_1, M_2，所以有 $4A+3C+D=0$，$-A-B+C+D=0$. 三式联立组成关于 A,B,C,D 的方程组并解得 $A=\frac{5}{7}D, B=-D, C=-\frac{9}{7}D$，因此所求平面方程为 $\frac{5}{7}Dx-Dy-\frac{9}{7}Dz+D=0$，即 $5x-7y-9z+7=0$.

五、两个平面的位置关系

两个平面的位置关系有相交、平行和重合三种. 为方便起见，设平面 π_1, π_2 的方程为 $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$，$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$. 两个平面方程联立的非齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \end{cases} \tag{8.46}$$

并记矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$.

当 $R(\boldsymbol{A})=1, R(\boldsymbol{B})=2$ 时，方程组(8.46)无解. 这说明两个平面无公共点，即两个平面平行.

当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1$ 时，方程组(8.46)有无穷多个解，且其基础解系含有两个解向量，方程组的任一解都可由这两个解向量线性表示，这说明两个平面的交点充满整个平面，即两个平面重合.

当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$ 时，方程组(8.46)有无穷多个解，但基础解系仅含一个向量，方程组的任意一个解总是这个向量的倍数. 这说明两个平面相交于一直线. 总结上述讨论，我们有

定理 8.8　设两个平面的一般方程组成非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \end{cases}$$

其系数矩阵、增广矩阵分别记为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，则

两个平面重合的充分必要条件为 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1$，平行的充分必要条件为 $R(\boldsymbol{A})=1, R(\boldsymbol{B})=2$；相交的充分必要条件为 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$.

例 8.34　讨论两个平面 $\lambda x+\lambda y+\lambda^2 z+\mu=0\ (\lambda\neq 0)$，$x+y+z+1=0$ 的相关位置.

解　由定理 8.8，

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ \lambda & \lambda & \lambda^2 & -\mu \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & \lambda-\mu \end{pmatrix}.$$

如果 $\lambda(\lambda-1)\neq 0$，即 $\lambda\neq 1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，两平面相交；如果 $\lambda(\lambda-1)=0$，而 $\lambda-\mu\neq 0$，即 $\lambda=1, \mu\neq 1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=1$，而 $R(\boldsymbol{B})=2$，两平面平行；如果 $\lambda(\lambda-1)=0$，

$\lambda-\mu=0$，即 $\lambda=\mu=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1$，两平面重合.

六、点到平面的距离

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 外的一点，从 M_0 作 π 的垂线，垂足为 M，则 $d=|\overrightarrow{M_0M}|$ 称为点 M_0 到 π 的距离. 见图 8.34.

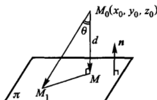


图 8.34

设 $\boldsymbol{n}$ 为 π 的法向量，则 $\overrightarrow{M_0M}=\lambda\boldsymbol{n}$，即 $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=\lambda(A,B,C)$，于是

$$
\begin{aligned}
d &= |\overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \\
&= \sqrt{(\lambda A)^2+(\lambda B)^2+(\lambda C)^2} = |\lambda|\sqrt{A^2+B^2+C^2}.
\end{aligned}
$$

在平面上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，设 $\overrightarrow{M_0M_1}$，$\overrightarrow{M_0M}$ 的夹角为 θ，则

$$
\begin{aligned}
d &= |\overrightarrow{M_0M}| = \left||\overrightarrow{M_0M_1}|\cos\theta\right| = \left|\frac{[\overrightarrow{M_0M_1},\overrightarrow{M_0M}]}{|\overrightarrow{M_0M}|}\right| \\
&= \frac{|(x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0)+(z_1-z_0)(z-z_0)|}{|\lambda|\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\
&= \frac{|\lambda A(x_1-x_0)+\lambda B(y_1-y_0)+\lambda C(z_1-z_0)|}{|\lambda|\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\
&= \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1-(Ax_0+By_0+Cz_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\
&= \frac{|-D-(Ax_0+By_0+Cz_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.
\end{aligned} \tag{8.47}
$$

(8.47)式称为点到平面的距离公式.

第八节 空间直线方程及相关位置

一、直线的一般方程

空间直线 l 可以看成两个平面 π_1，π_2 的交线. 设 π_i 的方程为 $A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0\ (i=1,2)$，则 l 上任一点的坐标一定满足方程组

$$
\begin{cases}
A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\
A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.
\end{cases} \tag{8.48}
$$

不在 l 上的点的坐标一定不满足这个方程组. 或者说以方程组的任意一个解作为坐标的点一定在 l 上. 所以这个方程组(8.48)就是 l 的方程，称为直线的一般

方程.因为过 l 的平面有无穷多个,从中任选两个,把它们的方程联立都是 l 的一般方程.所以直线的一般方程不是惟一的.

二、直线的对称式方程和两点式方程

我们把平行于直线 l 的非零向量 $\boldsymbol{t}$ 称为 l 的方向向量.因为过一定点并与某非零向量平行的直线仅有一条,所以直线可被一点和一个非零向量完全确定.

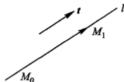


图 8.35

设直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{t}=(m,n,p)$(m,n,p 不同时为 0),$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 l 上一个定点,则对于 l 上任意一点 $M(x,y,z)$,总有 $\overrightarrow{M_0M}\parallel\boldsymbol{t}$(图 8.35),用坐标表示为:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{8.49}$$

如果 M 点不在 l 上,则 $\overrightarrow{M_0M}\not\parallel\boldsymbol{t}$,(8.49)式不能成立.所以(8.49)就是 l 的方程,我们称之为直线的对称式方程或点向式方程.

必须指出,对称式方程实际上包含两个独立的方程.当 m,n,p 中有一个为 0,例如 $p=0$ 时,对称式方程 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ 应理解为

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n},\\ z-z_0=0.\end{cases}$$

当 m,n,p 中有两个为 0,例如 $m=n=0$ 时,对称式方程应理解为

$$\begin{cases}x-x_0=0,\\ y-y_0=0.\end{cases}$$

设 $k\neq0$,则方程

$$\frac{x-x_0}{km}=\frac{y-y_0}{kn}=\frac{z-z_0}{kp},$$

与(8.49)等价,所以 (km,kn,kp) 也是直线的方向向量.我们称数组 km,kn,kp 为直线的方向数,同一条直线有无穷多组方向数,它们之间成比例,确定了直线的方位.另外,直线方向向量 $\boldsymbol{t}$ 的方向余弦也称为直线的方向余弦.

空间任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 确定一条直线,它的方向向量可取为 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$,所以直线方程可写成

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \tag{8.50}$$

或

$$\frac{x-x_2}{x_2-x_1}=\frac{y-y_2}{y_2-y_1}=\frac{z-z_2}{z_2-z_1}, \tag{8.51}$$

称为直线的两点式方程.

三、直线的参数方程

设直线 l 的对称式方程(8.49)中的比值为 λ,则

$$\begin{cases} x=x_0+m\lambda, \\ y=y_0+n\lambda, \quad (-\infty<\lambda<+\infty), \\ z=z_0+p\lambda \end{cases} \tag{8.52}$$

这是直线的参数方程,λ 为参数. 当 $\boldsymbol{t}$ 为单位向量时,参数 λ 的几何意义是直线上一点 $M(x,y,z)$ 到定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的有向距离.

四、直线各种方程的互化

为研究问题方便,经常需要把直线方程的某种形式化成另一种形式. 从以上各种直线方程的建立过程的讨论可以看出,对称式方程与参数方程的互化十分简单,对称式方程也很容易化成一般方程. 以下我们着重讨论一般方程化为对称式方程的问题. 建立对称式方程需要知道直线上一个点的坐标,只要求出一般方程这个三元线性非齐次方程组的一个解即可得到. 还需要知道直线方向向量 $\boldsymbol{t}$ 的坐标,因为 $\boldsymbol{t}$ 与一般方程中的两个平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 都垂直,所以可取 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$,则

$$\boldsymbol{t}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

于是直线 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 的对称式方程可写成

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

例 8.35 把直线 l 的一般方程

$$\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ 2x-y-z-2=0 \end{cases}$$

化为对称式方程和参数方程.

解 在一般方程中令 $z=0$,则

$$\begin{cases} x+y-1=0, \\ 2x-y-2=0, \end{cases}$$

由此解出 $x=1,y=0$. 于是$(1,0,0)$是直线 l 上一个已知点.

又取

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(0,3,-3)$$

为方向向量,则 l 的对称式方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-3}.$$

令比值为 λ，则有参数方程 $\begin{cases} x=1, \\ y=3\lambda, \\ z=-3\lambda \end{cases}$ $(-\infty<\lambda<+\infty)$.

五、两条直线的夹角

我们规定两条直线的方向向量夹角 $\langle \boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2\rangle$ 和 $\pi-\langle \boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2\rangle$ 中的锐角为两条直线的夹角.（图 8.36）

设直线 l_1,l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{t}_1=(m_1,n_1,p_1)$，$\boldsymbol{t}_2=(m_2,n_2,p_2)$，则夹角 θ 应满足

$$\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2\rangle|=\left|\frac{[\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2]}{|\boldsymbol{t}_1||\boldsymbol{t}_2|}\right|,$$

用坐标表示为

$$\cos\theta=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\ \sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}},\quad(8.53)$$

这就是两条直线的夹角计算公式.

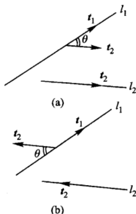


图 8.36

特别地，两条直线平行的充分必要条件为 $\boldsymbol{t}_1/\!/\boldsymbol{t}_2$，即

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

两条直线垂直的充分必要条件为 $[\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2]=0$，即

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

例 8.36　求直线 $l_1:\frac{x}{-4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-1}$ 与 $l_2:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$ 的夹角.

解　两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{t}_1=(-4,1,-1)$，$\boldsymbol{t}_2=(-2,2,1)$，则夹角 θ 的余弦

$$\cos\theta=\frac{|-4\times(-2)+1\times2+(-1)\times1|}{\sqrt{(-4)^2+1^2+(-1)^2}\ \sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

六、两条直线的位置关系

两条直线的位置关系有相交、重合、平行和异面四种. 这可以从两条直线公共点的个数，即两条直线方程联立所得线性方程组的解的讨论加以区分.

设直线 $l_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}=\lambda_1$，

$$l_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}=\lambda_2,$$

或

$$l_1:\begin{cases}x=x_1+m_1\lambda_1,\\ y=y_1+n_1\lambda_1,\\ z=z_1+p_1\lambda_1,\end{cases}$$

$$l_2:\begin{cases}x=x_2+m_2\lambda_2,\\ y=y_2+n_2\lambda_2,\\ z=z_2+p_2\lambda_2.\end{cases}$$

l_1,l_2 的公共点个数即方程组

$$\begin{cases}x_1+m_1\lambda_1=x_2+m_2\lambda_2,\\ y_1+n_1\lambda_1=y_2+n_2\lambda_2,\\ z_1+p_1\lambda_1=z_2+p_2\lambda_2,\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}m_1\lambda_1-m_2\lambda_2=x_2-x_1,\\ n_1\lambda_1-n_2\lambda_2=y_2-y_1,\\ p_1\lambda_1-p_2\lambda_2=z_2-z_1,\end{cases} \tag{8.54}$$

中 λ_1,λ_2 的个数.

记矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}m_1 & -m_2\\ n_1 & -n_2\\ p_1 & -p_2\end{pmatrix}$,

矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}m_1 & -m_2 & x_2-x_1\\ n_1 & -n_2 & y_2-y_1\\ p_1 & -p_2 & z_2-z_1\end{pmatrix}$.

当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$ 时,方程组(8.54)有惟一解,直线 l_1,l_2 有惟一交点,即 l_1,l_2 相交.

当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1$ 时,方程组(8.54)有无穷多解,直线 l_1,l_2 交点多于一个,即 l_1,l_2 重合.

当 $R(\boldsymbol{A})=2,R(\boldsymbol{B})=3$ 时,方程组(8.54)无解,这时 $\boldsymbol{A}$ 中三个二阶子式至少有一个不为 0,m_1,n_1,p_1 与 m_2,n_2,p_2 不成比例,即 l_1,l_2 异面.

当 $R(\boldsymbol{B})=2,R(\boldsymbol{A})=1$ 时,方程组(8.54)无解,这时 $\boldsymbol{A}$ 中所有二阶子式均为 0,m_1,n_1,p_1 与 m_2,n_2,p_2 成比例,即 l_1,l_2 平行.

以上讨论反过来也成立,所以我们有

定理 8.9 设直线 l_i 的方程为

$$\frac{x-x_i}{m_i}=\frac{y-y_i}{n_i}=\frac{z-z_i}{p_i}\quad(i=1,2),$$

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}m_1 & -m_2\\ n_1 & -n_2\\ p_1 & -p_2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}m_1 & -m_2 & x_2-x_1\\ n_1 & -n_2 & y_2-y_1\\ p_1 & -p_2 & z_2-z_1\end{pmatrix}$.

则l_1,l_2平行的充分必要条件为$R(\boldsymbol{B})=2,R(\boldsymbol{A})=1$;

l_1,l_2相交的充分必要条件为$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})=2$;

l_1,l_2重合的充分必要条件为$R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A})=1$;

l_1,l_2异面的充分必要条件为$R(\boldsymbol{B})=3,R(\boldsymbol{A})=2$.

例 8.37　判断下列两组直线的相关位置,如果相交则求出交点坐标.

(i) $l_1:\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-2}{3}$和$l_2:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+1}{-6}=\dfrac{z-8}{9}$;

(ii) $l_1:\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-5}{-3}$和$l_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+7}{-4}=\dfrac{z-5}{3}$.

解　(i) 记$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 6\\ 3 & -9\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ -2 & 6 & -4\\ 3 & -9 & 6\end{pmatrix}$.

则$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=1$,所以$l_1,l_2$重合.

(ii) 记$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 4\\ -3 & -3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -2\\ 2 & 4 & -4\\ -3 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

则$R(\boldsymbol{A})=2,R(\boldsymbol{B})=2$.所以$l_1,l_2$重合.

l_1,l_2的参数方程分别为

$$\begin{cases}x=4-2\lambda_1,\\ y=-3+2\lambda_1,\\ z=5-3\lambda_1,\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}x=2+\lambda_2,\\ y=-7-4\lambda_2,\\ z=5+3\lambda_2.\end{cases}$$

由此建立方程组

$$\begin{cases}4-2\lambda_1=2+\lambda_2,\\ -3+2\lambda_1=-7-4\lambda_2,\\ 5-3\lambda_1=5+3\lambda_2,\end{cases}\quad 即\begin{cases}-2\lambda_1-\lambda_2=-2,\\ 2\lambda_1+4\lambda_2=-4,\\ -3\lambda_1-3\lambda_2=0.\end{cases}$$

解得惟一解$\lambda_1=2,\lambda_2=-2$.因此所求交点坐标为$(0,1,-1)$.

七、直线与平面的位置关系

直线与平面的位置关系有相交、平行和直线在平面上三种.

设平面π的方程为$Ax+By+Cz+D=0$,直线l的方程为$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.$\pi$与$l$平行相当于$\pi$的法向量$\boldsymbol{n}$与$l$的方向向量$\boldsymbol{t}$垂直.$l$在$\pi$上除了$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{t}$垂直外,$l$上的定点$(x_0,y_0,z_0)$还要满足$\pi$的方程.$\pi$与$l$相交相当于$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{t}$不垂直,总之有

定理 8.10 设有平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 与直线 $l: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，则

l 与 π 平行的充分必要条件是 $Am+Bn+Cp=0$；

l 在 π 上的充分必要条件是 $Am+Bn+Cp=0, Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$；

l 与 π 相交的充分必要条件是 $Am+Bn+Cp\neq 0$；

特别地，l 与 π 垂直的充分必要条件是 $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$.

以下讨论直线 l 与平面 π 夹角的计算. 我们把 l 在 π 上的投影直线记为 l'，则 l 与 l' 所夹的锐角称为 l 与 π 的夹角，如图 8.37. 如果 l 在 π 上，规定夹角为 0，l 垂直于 π，规定夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

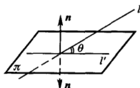


图 8.37

当 l 的方向向量 $\boldsymbol{t}$ 与 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 $\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{n}\rangle<\dfrac{\pi}{2}$ 时，l 与 π 的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{n}\rangle$，当 $\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{n}\rangle>\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\theta=\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{n}\rangle-\dfrac{\pi}{2}$，无论哪种情况都有

$$\theta=\left|\frac{\pi}{2}-\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{n}\rangle\right|,$$

这时
$$\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{t},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

这就是直线与平面夹角的计算公式.

例 8.38 求过点 $(2,-2,0)$ 且与平面 $x+2y-z+3=0$ 垂直的直线方程.

解 不妨取平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$ 为直线的方向向量，则所求直线方程为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}.$$

例 8.39 求平面 $\pi: x+4y-z+2=0$ 与直线 $l: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$ 的夹角 θ 和交点坐标.

解 因为 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,4,-1)$，l 的方向向量 $\boldsymbol{t}=(1,-2,2)$，则

$$\sin\theta=\frac{|1\times1+4\times(-2)+(-1)\times2|}{\sqrt{1^2+4^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{9}{3\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

又直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\lambda, \\ y=-3-2\lambda, \\ z=2+2\lambda, \end{cases}$$

把它代入平面 π 的方程

$$\lambda+4(-3-2\lambda)-(2+2\lambda)+2=0, \text{即} -9\lambda=12,$$

解得 $\lambda=-\frac{4}{3}$，这就是 l 与 π 的交点在 l 上的参数值，由此得交点坐标为 $\left(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

八、点到直线的距离

已知 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为直线 l：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ 外的一点，过 M_1 作与 l 相交的垂线，垂足为 N，则 $d=|\overrightarrow{M_1N}|$ 为 M_1 到 l 的距离.

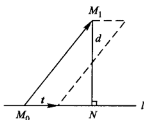


图 8.38

这时由 $\overrightarrow{M_0M_1}$ 与 l 的方向向量 $\boldsymbol{t}$ 形成的平行四边形的面积 S 可利用外积长的几何意义和底乘高两种方法求出，如图 8.38，即有

$$S=|\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{t}|=|\boldsymbol{t}|d,$$

从而

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{t}|}{|\boldsymbol{t}|}, \tag{8.55}$$

这就是点到直线的距离公式.

例 8.40　求点 $M_1(1,0,2)$，到直线 l：$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$ 的距离.

解　l 的方向向量 $\boldsymbol{t}=(2,1,1)$，$\overrightarrow{M_0M_1}=(1-1,0-0,2-1)=(0,0,1)$.

$$\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{t}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1,2,0).$$

$$|\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{t}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}, |\boldsymbol{t}|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}.$$

所以所求距离 $d=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$.

九、平面束

通过已知直线 l 的平面的集合称为以 l 为轴的平面束.

设 l 的方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

其中 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2 不成比例，则以 l 为轴的平面束可由方程

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{8.56}$$

来表示，其中 λ,μ 是不同时为 0 的任意实数.

原因是，首先它是三元一次方程，x,y,z 的系数 $\lambda A_1+\mu A_2,\lambda B_1+\mu B_2,\lambda C_1+\mu C_2$ 不全为 0，所以它表示平面. 其次 l 上任意点的坐标满足该方程，过 l 的任一平面方程都可以写成这种形式. 可见当 λ,μ 在实数范围内变化时（只要不同时为 0），(8.56)式表示了过 l 的所有平面. 特别地，当 $\lambda=1,\mu=0$ 和 $\lambda=0,\mu=1$ 时，(8.56)所表示的就是 l 方程中的两个平面.

对于求经过一条已知直线且满足某种条件的平面方程这样的问题，应用平面束方程求解往往较为简便.

例 8.41 求过直线 $l_1:\begin{cases}x+y+z-2=0,\\2x-y+z+6=0,\end{cases}$ 且与直线 $l_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{2}$ 垂直的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$\lambda(x+y+z-2)+\mu(2x-y+z+6)=0,$$

即

$$(\lambda+2\mu)x+(\lambda-\mu)y+(\lambda+\mu)z+(-2\lambda+6\mu)=0.$$

它与 l_2 垂直，则有

$$\frac{\lambda+2\mu}{1}=\frac{\lambda-\mu}{4}=\frac{\lambda+\mu}{2},$$

由此解得 $\lambda=-3\mu$. 于是所求平面方程为

$$-3\mu(x+y+z-2)+\mu(2x-y+z+6)=0,$$

即

$$x+4y+2z-12=0.$$

例 8.42 求直线 $l:\begin{cases}2x-y+z-1=0,\\x+y-z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi:x+y+3z-6=0$ 上的投影直线方程.

解 由定义，投影直线是过 l 且与 π 垂直的平面 π_1 与 π 的交线. 先求 π_1 的方程，为此，设 π_1 的方程为

$$\lambda(2x-y+z-1)+\mu(x+y-z+1)=0,$$

即

$$(2\lambda+\mu)x+(-\lambda+\mu)y+(\lambda-\mu)z-\lambda+\mu=0.$$

它与 π 垂直，则有

$$(2\lambda+\mu)\cdot1+(-\lambda+\mu)\cdot1+(\lambda-\mu)\cdot3=0,$$

即

$$4\lambda=\mu.$$

所以 π_1 的方程为

$$\lambda(2x-y+z-1)+4\lambda(x+y-z+1)=0,$$

即

$$2x+y-z+1=0.$$

把 π_1 的方程与 π 的方程联立即为所求投影直线的一般方程：$\begin{cases} x+y+3z-6=0, \\ 2x+y-z+1=0. \end{cases}$

第九节　二 次 曲 面

在空间直角坐标系中，由三元二次方程

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0 \tag{8.57}$$

表示的曲面称为二次曲面.(8.57)称为二次曲面的一般方程，它可以经过坐标轴的旋转和平移化为最简单的形式，即二次曲面的标准方程.在第五节我们曾经介绍过二次锥面(圆锥面)、二次柱面(椭圆柱面、抛物柱面、双曲柱面)等二次曲面.这一节，我们再介绍五种由标准方程给出的二次曲面.为了更好地了解这些二次曲面的形状，采用了所谓截痕法，即用坐标面以及与坐标面平行的平面与二次曲面相截，根据交线(截痕)的形状来推断曲面的形状的方法.

一、椭球面

1. 标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c>0). \tag{8.58}$$

2. 由方程可知

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,$$

即

$$|x|\leqslant a,|y|\leqslant b,|z|\leqslant c.$$

这表明椭球面位于平面 $x=\pm a,y=\pm b,z=\pm c$ 所围成的长方体内，是一个有限的曲面.

3. 在(8.58)中，把 x 换成 $-x$，方程不变.说明如果点 (x,y,z) 在椭球面上，则点 $(-x,y,z)$ 也在椭球面上.可见椭球面关于 yOz 平面是对称的.同理可知椭球面关于 xOy 平面，zOx 平面也对称.

在(8.58)中把 x,y 同时换成 $-x,-y$，方程不变，这说明椭球面关于 z 轴是对称的.同理可知它关于 x 轴和 y 轴也是对称的.

在(8.58)中把 x,y,z 同时换成 $-x,-y,-z$，方程不变，这说明椭球面关于

坐标原点也是对称的.

总之,由(8.58)式表示的椭球面关于三个坐标面、三条坐标轴及坐标原点都对称.

4. 用 xOy 平面去截椭球面得交线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ z=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0.\end{cases}$$

这是 xOy 平面上的椭圆.同理,用另外两个坐标平面也截得椭圆.

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{cases}$$

再用 xOy 平面的平行平面 $z=z_1(|z_1|\leqslant c)$ 截得

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\dfrac{a^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}+\dfrac{y^2}{\dfrac{b^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}=1,\\ z=z_1.\end{cases}$$

它是 $z=z_1$ 平面上的椭圆,其中心在 z 轴上,两个半轴 $\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z_1^2}$, $\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z_1^2}$ 随 $|z_1|$ 的增大而减小,当 $z_1=\pm c$ 时收缩为一点.用另外两个坐标面的平行平面 $x=x_1$, $|x_1|\leqslant a$; $y=y_1$, $|y_1|\leqslant b$ 去截也得到类似的结果.

5. 通过以上讨论可知椭球面(8.58)的形状如图8.39所示.

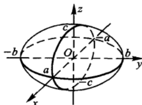


图 8.39

6. 我们把 a,b,c 称为椭球面的三个半轴.当其中有两个相等,例如 $a=b$ 时,椭球面的方程变为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

它可看成 xOz 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转一周所得到的曲面,所以称为旋转椭球面.当 $a=b=c$ 时,椭球面方程变为 $x^2+y^2+z^2=a^2$,这是以原点为球心,a 为半径的球面.总之,旋转椭球面和球面是一般椭球面的特例.

二、单叶双曲面

1. 标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c>0). \tag{8.59}$$

2. 由方程可知

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}\geqslant 1,$$

可见这一曲面位于椭圆柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$之外.

3. 与椭球面的对称性讨论一样,单叶双曲面(8.59)关于三个坐标面、三条轴和坐标原点都是对称的.

4. 用 xOy 平面去截单叶双曲面,所得交线为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0,\end{cases}$$

这是 xOy 平面上的椭圆.

用 yOz 平面截得

$$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0,\end{cases}$$

这是 yOz 平面上的双曲线,其实轴在 y 轴上.

同理,用 zOx 平面也截得双曲线

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0,\end{cases}$$

其实轴在 x 轴上.

用 xOy 平面的平行平面 $z=z_1$ 截得

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2+z_1^2)}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2+z_1^2)}=1,\\ z=z_1,\end{cases}$$

这是 $z=z_1$ 平面上的椭圆,其中心在 z 轴上,两半轴随 $|z_1|$ 的增大而增大.

用 yOz 平面的平行平面 $x=x_1$ 截得

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_1^2)}-\dfrac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(a^2-x_1^2)}=1,\\ x=x_1,\end{cases}$$

当 $|x_1|=a$ 时,为两条相交直线;当 $|x_1|>a$ 时为实轴与 z 轴平行的双曲线;当 $|x_1|<a$ 时为实轴与 y 轴平行的双曲线.

用 zOx 平面的平行平面 $y=y_1$ 去截，也有类似的结果.

5. 通过上述讨论可知，单叶双曲面(8.59)的形状如图 8.40 所示.

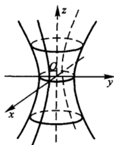


图 8.40

6. 当 $a=b$ 时，(8.59)变为 $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，它可以看成 zOx 平面上的双曲线

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0,\end{cases}$$

绕 z 轴旋转一周所得的曲面，所以它是旋转单叶双曲面. 另外，从图形不难看出，椭圆

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$$

是单叶双曲面最"细"的地方，这一椭圆称为单叶双曲面的腰椭圆或咽喉椭圆.

三、双叶双曲面

1. 标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c>0). \tag{8.60}$$

2. 由方程可知

$$\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\geqslant 1,$$

所以 $|x|\geqslant a$. 这说明曲面不在两个平行平面 $x=a, x=-a$ 之间.

3. 这一曲面关于三个坐标面，三条轴和坐标原点都对称.

4. 以 xOy 平面去截这一曲面，截痕为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0,\end{cases}$$

这是 xOy 平面上的双曲线，其中心在原点，实轴在 x 轴上.

以 zOx 平面去截也有类似的结果.

以 yOz 平面的平行平面 $x=x_1$ ($|x_1|\geqslant a$)去截，得

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(x_1^2-a^2)}+\dfrac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(x_1^2-a^2)}=1,\\ x=x_1,\end{cases}$$

当 $|x_1|=a$ 时，是一个点 $(a,0,0)$ 或 $(-a,0,0)$. 当 $|x_1|>a$ 时，是平面 $x=x_1$ 上

的椭圆.其中心在 x 轴上,两个半轴随 $|x_1|$ 的增大而增大.

5. 由以上讨论可知,双叶双曲面(8.60)的形状如图 8.41 所示.

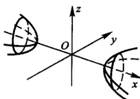


图 8.41

6. 当 $b=c$ 时,(8.60)变为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1,$$

它可以看成是由 zOx 平面上的双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1,\\ y=0,\end{cases}$$

绕 x 轴旋转一周所得的旋转曲面,称为旋转双叶双曲面.

四、椭圆抛物面

1. 标准方程

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p,q\text{ 同号}). \tag{8.61}$$

2. 由方程可知,当 $p,q>0$ 时,$z>0$;$p,q<0$ 时 $z<0$.所以这一曲面总在 xOy 平面的一侧.

3. 曲面(8.61)关于 yOz 平面和 zOx 平面对称,关于 z 轴也对称,但关于 xOy 平面、x 轴、y 轴和原点不对称.

4. 用 xOy 平面截得一点,即原点.用 xOy 平面的平行平面 $z=z_1$(当 $p,q>0$ 时,$z_1>0$;$p,q<0$ 时,$z_1<0$)截得椭圆.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2pz_1}+\dfrac{y^2}{2qz_1}=1,\\ z=z_1,\end{cases}$$

其中心在 z 轴上,两个半轴 $\sqrt{2pz_1}$, $\sqrt{2qz_1}$ 随 $|z_1|$ 的增大而增大.

用 yOz 平面截得

$$\begin{cases}y^2=2qz,\\ x=0,\end{cases}$$

这是 yOz 平面上的抛物线,其顶点在原点,以 z 轴为对称轴.

用 zOx 平面也截得类似结果.

以 yOz 平面的平行平面 $x=x_1$ 截得抛物线

$$\begin{cases}y^2=2q\left(z-\dfrac{x_1^2}{2p}\right),\\ x=x_1,\end{cases}$$

其顶点为 $\left(x_1,0,\dfrac{x_1^2}{2p}\right)$,对称轴平行于 z 轴.

5. 由上述讨论可知，椭圆抛物面(8.61)当 $p,q>0$ 时的形状如图 8.42 所示.

6. 当 $p=q$ 时，(8.61)变为

$$x^2+y^2=2pz.$$

它可看成由 zOx 平面上的抛物线

$$\begin{cases} x^2=2pz, \\ y=0, \end{cases}$$

绕 z 轴旋转一周而得的旋转曲面，称为旋转抛物面. 当 $p>0$ 时，它被 xOy平面的平行平面 $z=z_1$，$z_1>0$ 截得圆心在 z 轴上的圆.

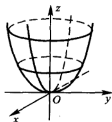


图 8.42

五、双曲抛物面

1. 标准方程

$$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z \quad (p,q \text{ 同号}). \tag{8.62}$$

2. 以下就 $p,q>0$ 的情况加以讨论. 这一曲面关于 yOz 平面，zOx 平面以及 z 轴对称.

3. 用 xOy 平面去截，所得交线为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2p}=0, \\ z=0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2p}}+\dfrac{y}{\sqrt{2q}}=0, \\ z=0, \end{cases} \quad \text{和} \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2p}}-\dfrac{y}{\sqrt{2q}}=0, \\ z=0. \end{cases}$$

这是 xOy 平面上交点为原点的两条相交直线.

用 xOy 平面的平行平面 $z=z_1$ 截得

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2pz_1}-\dfrac{y^2}{2qz_1}=1, \\ z=z_1, \end{cases}$$

这是 $z=z_1$ 平面上的双曲线. 当 $z_1>0$ 时，实轴和 x 轴平行，$z_1<0$ 时，实轴和 y 轴平行.

用 yOz 平面去截，所得交线为

$$\begin{cases} y^2=-2qz, \\ x=0, \end{cases}$$

这是 yOz 平面上以 z 轴为对称轴，开口向下的抛物线.

用 yOz 平面的平行平面 $x=x_1$ 截得

$$\begin{cases} y^2=-2q\left(z-\dfrac{x_1^2}{2p}\right), \\ x=x_1, \end{cases}$$

这是 $x=x_1$ 平面上对称轴平行于 z 轴，开口向下的抛物线.

用 zOx 平面去截，交线为

$$\begin{cases}x^2=2pz,\\ y=0,\end{cases}$$

这是 zOx 平面上以 z 轴为对称轴，开口向上的抛物线.

用 zOx 平面的平行平面 $y=y_1$ 截得

$$\begin{cases}x^2=2p\left(z-\dfrac{y_1^2}{2q}\right),\\ y=y_1,\end{cases}$$

这是 $y=y_1$ 平面上对称轴平行于 z 轴，开口向上的抛物线.

4. 通过上述讨论可知，当 $p,q>0$ 时，双曲抛物面(8.62)的形状如图 8.43 所示.

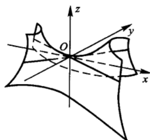


图 8.43

5. 因为这一曲面形状类似马鞍，所以也称为马鞍面，点 O 称为鞍点. 另外由方程 $z=xy$ 给出的曲面也是马鞍面，见下一节例 8.40.

第十节　二次曲面方程的化简

当给出的二次曲面方程为一般方程(8.57)时，很难用截痕法判断曲面形状和类型. 这时，我们可以利用线性变换化曲面方程为标准方程，再根据前面几节中的结论加以判断. 这里介绍化简二次曲面方程的基本方法.

二次曲面的一般方程(8.57)式的左边可分为三个部分，即二次项部分(六项)，一次项部分(三项)和常数项部分(一项). 为了化简这一方程，需要寻找一个正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} \tag{8.63}$$

把二次项部分(即三元二次型)中的交叉乘积项消去，这一过程就是第七章所讲的用正交变换化二次型为标准形. 这样做基于如下两个理由，其一，通过变换(8.63)所得新方程的二次项系数仅与原方程的二次项系数有关，而与一次项系数无关；其二，正交变换相当于坐标轴的旋转，它不会改变曲面的类型和形状.

经正交变换(8.63)，二次曲面方程变为

$$a_{11}'x'^2+a_{22}'y'^2+a_{33}'z'^2+2a_1'x'+2a_2'y'+2a_3'z'+a_0=0.$$

在此基础上，对方程左边配方，再作一相应的线性变换

$$\begin{cases} X=x'+b_1, \\ Y=y'+b_2, \\ Z=z'+b_3, \end{cases} \tag{8.64}$$

则可得到二次曲面方程的最简形式. 注意(8.64)相当于坐标轴的平移,它也不改变曲面的类型和形状. 下面举例详细说明这一方法.

例 8.43 化二次曲面方程

$$7x^2-8y^2-8z^2+8xy-8xz-2yz-16x+14y-14z-5=0$$

为标准方程,并说明曲面类型.

解 曲面方程的二次项部分为三元二次型

$$\varphi=7x^2-8y^2-8z^2+8xy-8xz-2yz,$$

φ 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix},$$

特征多项式为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & -4 \\ 4 & -8-\lambda & -1 \\ -4 & -1 & -8-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-9)(9+\lambda)^2,$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值

$$\lambda_1=\lambda_2=-9, \lambda_3=9.$$

对于 $\lambda=-9$,

$$\boldsymbol{A}+9\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

正交化得 $\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}-\frac{-4}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

单位化得 $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

对于 $\lambda=9$，

$$A-9E=\begin{pmatrix}-2&4&-4\\4&-17&-1\\-4&-1&-17\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

对应的特征向量 $p_3=\begin{pmatrix}-4\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $e_3=\begin{pmatrix}-\frac{4}{\sqrt{18}}\\-\frac{1}{\sqrt{18}}\\\frac{1}{\sqrt{18}}\end{pmatrix}$.

于是在正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{3}&-\frac{4}{\sqrt{18}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{\sqrt{18}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt{18}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\tag{8.65}$$

下，$\varphi=-9x'^2-9y'^2+9z'^2$.

这时一次项部分变为

$$\begin{aligned}-16x+14y-14z=&-16\left(\frac{1}{3}y'-\frac{4}{\sqrt{18}}z'\right)+14\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'-\frac{2}{3}y'-\frac{1}{\sqrt{18}}z'\right)-\\&14\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{\sqrt{18}}z'\right)\\=&-24y'+6\sqrt{2}z'.\end{aligned}$$

所以，经正交变换(8.65)原方程化简为

$$-9x'^2-9y'^2+9z'^2-24y'+6\sqrt{2}z'-5=0.$$

配方为 $x'^2+\left(y'+\frac{4}{3}\right)^2-\left(z'+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=1$.

再作变换

$$\begin{cases}X=x',\\Y=y'+\frac{4}{3},\\Z=z'+\frac{\sqrt{2}}{3},\end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x'=X, \\ y'=Y-\dfrac{4}{3}, \\ z'=Z-\dfrac{\sqrt{2}}{3}, \end{cases}$$

则方程成为最简形式：

$$X^2+Y^2-Z^2=1.$$

可见所给二次曲面是一个旋转单叶双曲面.

所用的变换为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{3} & -\dfrac{4}{\sqrt{18}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{\sqrt{18}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y-\dfrac{4}{3} \\ Z-\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{3} & -\dfrac{4}{\sqrt{18}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{\sqrt{18}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

例 8.44　化二次曲面方程 $z=xy$ 为标准方程，说明曲面类型并给出所用变换.

解　所给方程为 $xy-z=0$，二次项部分 $\varphi=xy$，φ 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} -\lambda & \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda\left(\dfrac{1}{2}-\lambda\right)\left(\dfrac{1}{2}+\lambda\right).$$

特征值

$$\lambda_1=-\frac{1}{2},\lambda_2=0,\lambda_3=\frac{1}{2}.$$

对于 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$，$\boldsymbol{A}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，单位化为 $\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

$$\text{对于 }\lambda=0,\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{e}_2$.

$$\text{对于 }\lambda=\frac{1}{2},\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，单位化为 $\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

所以经正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix},$$

方程化为

$$-\frac{1}{2}x'^2+\frac{1}{2}z'^2-y'=0,$$

即

$$\frac{z'^2}{2}-\frac{x'^2}{2}=y'.$$

这是一个双曲抛物面. 注意它在原坐标系中经过 x 轴、y 轴，与(8.62)不同.

例 8.45　化二次曲面方程

$$2y^2-2xy+2xz-2yz+2x+y-3z-5=0$$

为标准方程并说明曲面类型.

解　方程二次项部分 $\varphi=2y^2-2xy+2xz-2yz$ 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-3)(\lambda+1).$

特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=3.$

$$\text{对于 }\lambda=-1,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

对应的特征向量

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\text{单位化为 }\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

$$\text{对于 }\lambda=0,\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

对应的特征向量

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\text{单位化为 }\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

$$\text{对于 }\lambda=3,\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

对应的特征向量

$$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix},\text{单位化为 }\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.$$

所以在正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$$

下，方程变为

$$-x'^2+3z'^2+2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y'-\frac{2}{\sqrt{6}}z'\right)-$$

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'\right)-5=0,$$

即

$$x'^2-3z'^2+\frac{5}{\sqrt{2}}x'+\frac{3}{\sqrt{6}}z'+5=0.$$

配方得

$$\left(x'+\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2-3\left(z'-\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2=-2.$$

再作变换

$$\begin{cases}X=x'+\dfrac{5}{2\sqrt{2}},\\Y=y',\\Z=z'-\dfrac{1}{2\sqrt{6}},\end{cases}\quad 即\begin{cases}x'=X-\dfrac{5}{2\sqrt{2}},\\y'=Y,\\z'=Z+\dfrac{1}{2\sqrt{6}},\end{cases}$$

则得标准方程 $X^2-3Z^2=-2$，即$\frac{3}{2}Z^2-\frac{1}{2}X^2=1$. 这是一个双曲柱面.

习　题　A

1. 求点 $M(x_0,y_0,z_0)$关于(1)各坐标轴;(2)各坐标面;(3)坐标原点的对称点的坐标.

2. 求点 $M(x_0,y_0,z_0)$到各坐标轴的距离.

3. 在 xOy 平面上,求到 $A(4,-1,1)$,$B(1,2,1)$,$C(3,1,-2)$距离相等的点的坐标.

4. 设向量 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{v}=-3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}$ 和 $2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$.

5. 用向量法证明梯形中位线平行于底且长度为上、下底长度之和的二分之一.

6. 用点 D_1,D_2,D_3,D_4 把线段 BC 五等分,依次连接 BC 外一点 A 与 D_1,D_2,D_3,D_4. 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{AD_1}$,$\overrightarrow{AD_2}$,$\overrightarrow{AD_3}$,$\overrightarrow{AD_4}$和$\overrightarrow{AC}$.

7. 设向量$\overrightarrow{AB}=(3,-7,6)$,终点 B 的坐标为$(1,-2,4)$,求始点 A 的坐标.

8. 已知两点 $A(3,0,1)$,$B(4,-1,-1)$,求向量 $3\overrightarrow{AB}$和$-4\overrightarrow{BA}$的坐标.

9. 已知两点 $M_1(1,\sqrt{2},4)$, $M_2(2,0,3)$,求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

10. 设向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,求 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的模,且用 $\boldsymbol{a}^0,\boldsymbol{b}^0,\boldsymbol{c}^0$ 表达 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$.

11. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,-4,1)$的单位向量.

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,-2)$,$\boldsymbol{b}=(3,1,4)$,求(1)$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;(2)$[(-3\boldsymbol{a}),2\boldsymbol{b}]$和$(-3\boldsymbol{a})\times 2\boldsymbol{b}$;(3)$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

13. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为单位向量且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,求$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]$的值.

14. 已知点 $A(2,-1,3)$,$B(0,3,5)$,$C(-1,-1,4)$,求与$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$都垂直的单位向量.

15. 设向量 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$,$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$,$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直,求 λ,μ 应满足的关系.

16. 求以 $A(4,0,-1)$,$B(1,1,1)$,$C(2,3,-2)$为顶点的三角形的面积.

17. 证明:$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$,并说明其几何意义.

18. 证明：如果 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$. 说明其几何意义.

19. 求与两定点 $A(4,3,-1)$，$B(2,2,0)$ 等距离的点的轨迹方程.

20. 求以点 $M(3,-1,4)$ 为球心且过原点的球面方程.

21. 已知球面方程 $x^2+y^2+z^2-2x+6y+8z-23=0$，求其球心坐标和半径.

22. 把 yOz 平面上的抛物线 $y^2=2z$ 绕 z 轴旋转一周，求所得旋转曲面的方程.

23. 把 xOy 平面上的圆 $x^2+(y-1)^2=16$ 绕 y 轴旋转一周，求所得旋转曲面的方程.

24. 把 yOz 平面上的双曲线 $\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$ 分别绕 z 轴和 y 轴旋转一周，求所得旋转曲面的方程.

25. 在空间直角坐标系中画出下列曲面的图形：

(1) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$； (2) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$；

(3) $x^2-z=0$； (4) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

26. 指出下列方程在平面解析几何和空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $x=3$； (2) $y=2x-1$；

(3) $x^2+y^2=4$； (4) $x^2-y^2=4$；

(5) $\begin{cases}x=1,\\y=2;\end{cases}$ (6) $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\\z=3.\end{cases}$

27. 求母线平行于 x 轴及 y 轴且过曲线

$$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2-y^2+z^2=1\end{cases}$$

的柱面方程，并指出是何种柱面.

28. 求球面 $x^2+y^2+z^2=16$ 与平面 $x+y=1$ 的交线在 yOz 平面上的投影方程.

29. 化下列曲线方程为参数方程：

(1) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\y=x;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5\\z=0.\end{cases}$

30. 求上半球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围的立体在三个坐标面上的投影区域.

31. 求过点 $A(1,0,-3)$ 且与平面 $x-2y+z-6=0$ 平行的平面方程.

32. 求过点 $M_1(1,1,-1)$，$M_2(4,3,2)$，$M_3(1,-1,3)$ 的平面方程.

33. 一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$，求此平面的方程.

34. 求满足下列条件的平面方程：

(1) 过 x 轴和点 $(-3,2,1)$；

(2) 平行于 zOx 平面且过点 $(5,4,-1)$；

(3) 平行于 y 轴且过点 $(4,1,0)$ 和 $(2,3,-1)$.

35. 求点 $A(4,3,-1)$ 到平面 $2x+y+z-6=0$ 的距离.

36. 求满足下列条件的直线方程：

(1) 过点$(3,2,-4)$且与直线$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-3}$平行；

(2) 过点$M_1(3,1,-2)$，$M_2(1,1,5)$；

(3) 过点$(2,0,-1)$且与直线$\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ 3x+y-2z+4=0 \end{cases}$垂直相交；

(4) 过点$(0,2,4)$且与平面$x+2z=1$和$y-3z=2$平行.

37. 化直线方程$\begin{cases} x-y+z=1, \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$为对称式方程和参数方程.

38. 求过点$(3,-2,2)$和直线$\frac{x-1}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z+2}{-1}$的平面方程.

39. 求点$(-1,2,0)$在平面$x+2y-z+1=0$上的投影.

40. 求点$M(4,1,-2)$到直线$\begin{cases} 2x+y+4=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$的距离.

41. 求直线$\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ x-y-z+9=0 \end{cases}$在平面$x-4y+z=3$上的投影直线方程.

42. 画出下列各曲面所围立体的图形：

(1) 抛物柱面$2y^2=x$，平面$z=0$和$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$；

(2) 抛物柱面$x^2=1-z$，平面$y=0$，$z=0$和$x+y=1$；

(3) 圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和旋转抛物面$z=2-x^2-y^2$；

(4) 旋转抛物面$x^2+y^2=z$，柱面$y^2=x$，平面$z=0$和$x=1$.

习　题　B

1. 已知$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2\sqrt{7}$，求$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

2. 已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=2$，求$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

3. 已知$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=2$，求$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$与$(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$的内积.

4. 已知向量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，求与$\boldsymbol{a}$共线且满足$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}]=-18$的向量$\boldsymbol{x}$.

5. 设$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，$\boldsymbol{a}=(2,4,-1)$，$\boldsymbol{b}=(3,6,m)$，求$m$.

6. 已知$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{6}$，求以$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积.

7. 设$\boldsymbol{a}=(1,-1,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,x)$，问x为何值时，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$最小，求出此最小值.

8. 指出下列旋转曲面的一条母线及旋转轴：

(1) $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$；　　(2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$；

(3) $\frac{x^2}{4}-y^2+\frac{z^2}{4}=1$.

9. 设一平面垂直于 xOy 平面且过点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0 \end{cases}$ 的垂线，求此平面的方程.

10. 求过点 $(-1,0,4)$ 且与平面 $3x-4y+z-10=0$ 平行，又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线方程.

11. 化简下列二次曲面方程，并指出是何种曲面.

(1) $x^2+3y^2+3z^2-2yz-2x-2y+6z+3=0$;

(2) $4y^2+4z^2+4yz-2x-14y-22z+33=0$;

(3) $2y^2-2yz+2zx-2xy-x-2y+3z-2=0$.

习题答案与提示

第一章

习题 A

1. (1) 2;(2) 0;(3) $a^3+b^3+c^3-3abc$;(4) 6.

2. (1) 6;(2) 0;(3) $\frac{n(n-1)}{2}$;(4) $\frac{n(n-1)}{2}$.

4. (1) $i=7,j=3$;(2) $i=2,j=9$.

5. (1) $a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$, $-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$;

   (2) $-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$, $-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$, $-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$.

7. (1) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$;

   (2) $(-1)^{n+1}n!$.

8. (1) $4abc$;(2) $4abcdef$;(3) $(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)$;(4) $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(a_j-a_i)\sum\limits_{i=1}^{4}a_i$.

10. $3a-b+2c+d$.

11. (1) $(a^2-1)a^{n-2}$;(2) $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$;

    (3) 当 $n=1$ 时,原式$=1$,当 $n=2$ 时,原式$=-7$,当 $n\geqslant 3$ 时,原式$=6\cdot(n-3)!$;

    (4) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^n$ 或$(ad-bc)^n$.

13. (1) 共有 $n-1$ 个解:$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$;

    (2) 共有 $n-1$ 个解:$0,1,2,\cdots,n-2$.

14. (1) 2;(2) 2.

15. (1) 有惟一解:$x=\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}$,$y=\frac{(d-a)(c-d)}{(b-a)(c-b)}$;$z=\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$;

    (2) 有惟一解:$x_1=1,x_2=-1,x_3=0,x_4=2$.

习题 B

1. C_n^2 或$\frac{n(n-1)}{2}$.

2. 0(可应用定理 1.1 的推论 3).

4. $D_n=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$. 可考虑如下 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & x \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} & x^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} & x^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n & x^n \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n}(x-a_k)\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i),$$

而该行列式按最后一列展开时，其 $n-1$ 次项系数为 $-D_n$.

5. $D(n)=(-2)^n$.

6. 引入一个 Vandermonde 行列式

$$\boldsymbol{V}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

考虑 DV.

第二章

习题 A

1. (1) $\begin{pmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{pmatrix}$；(2) $\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 & 5 \\ 11 & -3 & -12 & 18 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BD}=\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -7 & -6 & 12 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}=14$，$\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$，$a,b$ 为任意数.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (1) $\begin{bmatrix} -4 & -8 & 0 \\ -3 & -11 & 7 \\ -8 & -12 & -16 \end{bmatrix}$；(2) $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 2 & -14 & 6 \\ -11 & -11 & -17 \end{bmatrix}$；(3) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

6. 因 $\boldsymbol{A}^2=-4\boldsymbol{A}$，故 $\boldsymbol{A}^6=-4^5\boldsymbol{A}=-1\,024\boldsymbol{A}$.

7. (1) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$；(2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；

(3) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$;(4) $\begin{pmatrix}1&-1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&-1\\&&&1\end{pmatrix}$.

8. $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&-3&0\\1&1&-3\end{pmatrix}$;

$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}-3&0&0\\4&-3&0\\0&4&-3\end{pmatrix}$.

9. $\boldsymbol{A}^6=\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{11}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$.

10. $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&-4\\1&0&-2\end{pmatrix}$.

11. $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&3\\3&2&-5\end{pmatrix}$.

12. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$;$\boldsymbol{A}^5=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$.

13. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}7&0\\0&-2\end{pmatrix}$;$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^n=\begin{pmatrix}7^n&0\\0&(-2)^n\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}7^n&0\\0&(-2)^n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}6\cdot7^n+3\cdot(-2)^n&9\cdot7^n-9\cdot(-2)^n\\2\cdot7^n-2\cdot(-2)^n&3\cdot7^n+6\cdot(-2)^n\end{pmatrix}$.

14. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=40$.

16. $|\boldsymbol{A}^*|=a^{n-1}$

20. $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}9&12&15&4\\19&26&33&7\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

21. (1) $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}23&20&&\\10&9&&\\&&50&14\\&&32&9\end{pmatrix}$;(2) $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}19&8&&\\30&13&&\\&&37&14\\&&58&22\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}4&12&&\\-20&-4&&\\&&13&0\\&&-26&-13\end{pmatrix}$;(4) $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&&\\-2&5&&\\&&2&-3\\&&-5&8\end{pmatrix}$.

习题 B

2. $B:=A-\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A)E$

3. 必要性显然;充分性:$[A_1^{\mathrm{T}},A_2^{\mathrm{T}},\cdots,A_n^{\mathrm{T}}]:=A^{\mathrm{T}}$,$E_{ij}$ 为(i,j)位置为 1,其余位置为 0 的矩阵,则 $A^{\mathrm{T}}E_{ij}A=A_i^{\mathrm{T}}A_j\Rightarrow A_jA_i^{\mathrm{T}}=\delta_{ij}$.

5. (1) 可对分块阵$\begin{pmatrix}E_m & B\\ A & E_n\end{pmatrix}$作分块矩阵的初等变换化三角形考虑.

6. $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1}(E+B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}) & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}\\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1}\end{bmatrix}$.

第三章

习题 A

1. (1,4,−25,7)

2. $\alpha=(1,2,3,4)$

6. (1) 无关;(2) 无关;(3) 相关;(4) 无关.

12. (1) 相关,α_1,α_2;(2) 无关,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$;(3) 相关,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

15. (1) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,3;(2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,2;(3) $\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,2.

17. 用分块矩阵的初等变换方法即证.

习题 B

4. 利用 $R\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r;\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s\}\leqslant R\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\}+R\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s\}$.

第四章

习题 A

1. (1) $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\-5\\7\end{pmatrix}$;(2) $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\1\end{pmatrix}$;(3) $\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}$;(4) 只有零解.

2. (1) $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}1\\3\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2 为任意常数;

(2) 惟一解 $\begin{pmatrix}-8\\3\\6\\0\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}1\\-7\\10\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$,其中 c 为任意常数;

(4) 无解.

3. $a_1+a_2+\cdots+a_5=0$ 时有解:$\begin{pmatrix}a_1+a_2+a_3+a_4\\a_2+a_3+a_4\\a_3+a_4\\a_4\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$,其中 c 为任意常数.

4. (1) $\lambda\neq1,-2$;(2) $\lambda=-2$;(3) $\lambda=1$.

5. 当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq2$ 时,有惟一解;当 $\lambda=1$ 时,无解;当 $\lambda=2$ 时,有无穷多解,$\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-3\\-1\\5\end{pmatrix}$,其中 c 为任意常数.

6. (1) 当 $b=2,a\neq1$ 时,有惟一解,$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$;

(2) 当 $b\neq2$ 时,方程组无解;

(3) 当 $b=2,a=1$ 时,方程组有无穷多个解,$\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$,其中 c 为任意常数.

9. $c\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$,其中 c 为任意常数.

习题 B

1. (1) $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-3$ 时仅有零解;

(2) $\lambda=1$ 时,$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$;$\lambda=-3$ 时,$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. 当 $a\neq-10$,且 $a\neq0$ 时,方程组无解;

当 $a=-10$ 时，方程组有惟一解 $\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$；

当 $a=0$ 时，方程组有无穷多解，通解为

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$c_1,c_2$ 是任意常数.

3. 当 $a=-1,b\neq0$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2$，而 $R(\boldsymbol{B})=3$，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示；

当 $a\neq-1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=4$，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，且表法惟一. $\boldsymbol{\beta}=\frac{-2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3$；

当 $a=-1,b=0$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，且表法不惟一. $\boldsymbol{\beta}=(-2c_1+c_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(1+c_1-2c_2)\boldsymbol{\alpha}_2+c_1\boldsymbol{\alpha}_3+c_2\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 c_1,c_2 是任意常数.

7. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，其中 c 为任意常数.

8. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$，其中 c 为任意常数.

第五章

习题 A

1. (4) 是线性空间，(5) 是线性空间，其余不是.

2. (4) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 是一组基，是 6 维线性空间.

(5) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 是一组基，是 2 维线性空间.

3. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$，3.

4. V_1,V_3,V_5,V_6 是 K^n 的子空间.

5. 维$(V_1)=n-1$，$(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},(0,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,(0,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$；维$(V_3)=n-1$，

$(-1,1,0,\cdots,0)^T,(-1,0,1,\cdots,0)^T,\cdots,(-1,0,0,\cdots,1)^T$；维$(V_5)=1,(1,2,\cdots,n)^T$；维$(V_6)=2,(1,0,\cdots,0)^T,(0,1,\cdots,1)^T$.

6. (2) $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix}f(a)\\f'(a)\\\dfrac{f''(a)}{2!}\\\vdots\\\dfrac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}\end{pmatrix}$.

8. (1) $\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-3&-2\\2&4&4\end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix}2\\-5\\10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

9. (1) 是线性变换；(3) 是线性变换.

10. (1) $\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\-1&0&1&0\\-1&-1&1&1\end{pmatrix}$；(3) $\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix}1&2&0\\1&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$.

12. (1) $\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&-1&-2\end{pmatrix}$.

13. (1) $\begin{pmatrix}a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{13}&a_{12}&a_{11}\end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix}a_{11}&ka_{12}&a_{13}\\\dfrac{1}{k}a_{21}&a_{22}&\dfrac{1}{k}a_{23}\\a_{31}&ka_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12}&a_{22}-a_{12}&a_{23}-a_{13}\\a_{31}+a_{32}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$.

14. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\dfrac{1}{\sqrt{102}}\begin{pmatrix}-1\\-7\\6\\4\end{pmatrix}$.

15. $\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}3\\5\\1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

习题 B

1. (1) 是线性空间.

2. (1) 正实数 $a\neq 1$ 是一组基，$\mathbf{R}^+$ 是实数域上的 1 维线性空间.

5. (1) $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix}-1&1&-2\\2&2&0\\3&0&2\end{pmatrix}$.

7. (1) 关于 y 轴对称；(2) 投影到 x 轴；
   (3) 关于直线 $y=x$ 对称；(4) 顺时针旋转 90°.

8. (1) $\mathscr{A}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$；(2) $\mathscr{A}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$；
   (3) $\mathscr{A}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2&2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

10. $\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}-4\\0\\-1\\3\end{pmatrix}$.

11. (2) $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 时，维$(U)=n-1$；当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时，维$(U)=n$.

12. $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\3\end{pmatrix}$.

第六章

习题 A

1. (1) $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$；$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

   (2) $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$；$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

(3) $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1,\lambda_3=-1$；$\begin{pmatrix}4\\1\\1\\0\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\0\end{pmatrix}$.

(4) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=4$；$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. (1) 能与对角形矩阵相似，

$$\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}.$$

(2) 能与对角形矩阵相似.

$$\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}.$$

(3) 不能与对角形矩阵相似.

(4) 不能与对角形矩阵相似.

3. (1) $\boldsymbol{Q}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&2&-2\\-2&1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2&&\\&5&\\&&-1\end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}4&&\\&4&\\&&-2\end{pmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{2}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}4&&&\\&4&&\\&&2&\\&&&6\end{pmatrix}$.

4. (1) $\lambda^4+a_3\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$.

13. $\boldsymbol{A}^{-1}$有一个特征值为$\frac{1}{\lambda}$，$\boldsymbol{A}^*$有一个特征值为$\frac{\det\boldsymbol{A}}{\lambda}$.

14. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$.

15. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

16. $x=2, y=6$; $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

17. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(-1)^n+3^n & (-1)^n-3^n\\ (-1)^n-3^n & (-1)^n+3^n\end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix}2\cdot 3^n-2^n & 3^n-2^n\\ -2\cdot 3^n+2^{n+1} & -3^n+2^{n+1}\end{pmatrix}$.

习题 B

1. -2.

2. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. $x=1$.

7. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}$.

13. (1) $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$;

(2) $\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\ 2-2^{n+2}+3^{n+1}\\ 2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}$.

14. 预测 2010 年底该地从事农业生产和从事非农工作人员各占全部劳动力的 $\frac{1}{16}\left(1+\frac{11}{5^{11}}\right)$和$\frac{1}{16}\left(15-\frac{11}{5^{11}}\right)$；多年之后从事农业生产和从事非农工作人员各约占全部劳动力的 6/100 和 94/100.

第七章

习题 A

1. (1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & 2\end{pmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-2\\0&0&-2&0\end{pmatrix}$.

2. (1) 标准形 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$,所用正交变换为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5}&\frac{2\sqrt{5}}{15}&\frac{1}{3}\\\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{4\sqrt{5}}{15}&\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}.$$

(2) 标准形 $f=-2y_1^2+7y_2^2+7y_3^2$,所用正交变换为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{6}\\-\frac{2}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{6}\\\frac{1}{3}&0&-\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}.$$

(3) 标准形 $f=y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$,所用正交变换为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}.$$

(4) 标准形 $f=9y_3^2$,所用正交变换为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{5}}{5}&-\frac{2\sqrt{5}}{15}&\frac{1}{3}\\\frac{\sqrt{5}}{5}&\frac{4\sqrt{5}}{15}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}.$$

3. (1) 标准形 $f=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$,所用可逆变换为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}.$$

(2) 标准形 $f=y_1^2-y_2^2$,所用可逆变换为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}.$$

(3) 标准形 $f=z_1^2-z_2^2-z_3^2$,所用可逆变换为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{z}.$$

(4) 标准形 $f=y_1^2-2y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2$,所用可逆变换为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&-2&1&-1\\0&1&-\frac{3}{2}&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}.$$

4. (1) 正定;(2) 负定.

5. (1) $t>2$;(2) $-\frac{4}{5}<t<0$.

8. 设 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$,则存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 对称,即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$,可见 $\boldsymbol{B}$ 也对称.

9. 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $-\boldsymbol{A}$ 合同,则 $-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$,故有 $\det(-\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC})$,即 $(-1)^n\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{A}\cdot(\det\boldsymbol{C})^2$. 这样则有 $(\det\boldsymbol{C})^2=(-1)^n>0$,故 n 为偶数.

习题 B

1. $a=2,\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

2. $k=3$,f 的特征值为 0,4,9.

3. $a=3,b=1,\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\0&-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$.

4. (1) 设初等方阵 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}(j,i(k))$ 的转置为 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}(i,j(k))$,故 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是把 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行乘 k 加到第 i 行上,$(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}$ 是把 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的第 j 列乘 k 加到第 i 列上,对其他两种初等方阵有类似结论.

(2) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同,则存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$,设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_s$ ($\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_s$ 为初等方阵)则 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}_s^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}$,故 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}_s^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_s$. 由(1)知 $\boldsymbol{B}$ 是对 $\boldsymbol{A}$ 进行一系列相同的初等行变换和初等列变换得到的,反之显然成立.

7. 若 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 为正定矩阵,则对任意非零向量 $\boldsymbol{x}$,有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}>0$,即 $(\boldsymbol{Bx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})>0$. 因 $\boldsymbol{A}$ 正定,所以 $\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$. 可见齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解,即 $R(\boldsymbol{B})=n$;反之,由 $R(\boldsymbol{B})=n$ 知齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解,即若 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$. 这时 $(\boldsymbol{Bx})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})>0$,即 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})\boldsymbol{x}>0$,故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 正定.

第八章

习题 A

1. 关于 x 轴对称点的坐标为 $(x_0,-y_0,-z_0)$；关于 xOy 平面对称点的坐标为 $(x_0,y_0,-z_0)$；关于原点的对称点的坐标为 $(-x_0,-y_0,-z_0)$. 其余类似可得.

2. 到 x,y,z 轴距离分别为 $\sqrt{y_0^2+z_0^2}$，$\sqrt{x_0^2+z_0^2}$ 和 $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$.

3. $(2,0,0)$.

4. $\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}=-4\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-7\boldsymbol{c}, 2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}+6\boldsymbol{c}$.

6. $\overrightarrow{AD_1}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{5}\boldsymbol{b}, \overrightarrow{AD_2}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{5}\boldsymbol{b}, \overrightarrow{AD_3}=\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}, \overrightarrow{AD_4}=\boldsymbol{a}+\frac{4}{5}\boldsymbol{b}, \overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

7. $A(-2,5,-2)$.

8. $3\overrightarrow{AB}=(3,-3,-6), -4\overrightarrow{BA}=(4,-4,-8)$

9. $|\overrightarrow{M_1M_2}|=2; \cos\alpha=\frac{1}{2}, \cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\gamma=-\frac{1}{2}; \alpha=\frac{\pi}{3}, \beta=\frac{3\pi}{4}, \gamma=\frac{2\pi}{3}$.

10. $\boldsymbol{a}=\sqrt{3}\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}=\sqrt{38}\boldsymbol{b}^0, \boldsymbol{c}=3\boldsymbol{c}^0$.

11. $\boldsymbol{a}^0=\pm\frac{1}{\sqrt{21}}(2,-4,1)$.

12. (1) $-3,(10,-10,-5)$；(2) $18,(-60,60,30)$；(3) $-\frac{\sqrt{26}}{26}$.

13. $-\frac{3}{2}$.

14. $\pm\frac{\sqrt{11}}{11}(1,-1,3)$.

15. $\lambda=2\mu$.

16. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

19. $2x+y-z-9=0$.

20. $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=26$.

21. 球心坐标 $(1,-3,-4)$，半径 $r=7$.

22. $x^2+y^2=2z$.

23. $x^2+(y-1)^2+z^2=16$.

24. $\frac{x^2+y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1, \frac{y^2}{4}-\frac{x^2+z^2}{9}=1$.

26. (1) 直线，平面；(2) 直线，平面；(3) 圆，圆柱面；(4) 双曲线，双曲柱面；(5) 点，直线；(6) xOy 平面上无此图形，平面 $z=3$ 上的椭圆.

27. $3y^2-z^2=14$，双曲柱面；$3x^2+2z^2=17$，椭圆柱面.

28. $\begin{cases}2y^2+z^2-2y=15,\\ x=0,\end{cases}$ 椭圆.

29. (1) $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=\sqrt{2}\cos\theta, (0\leqslant\theta<2\pi). \\ z=2\sin\theta \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=2+\cos\theta, \\ y=1+\sin\theta, (0\leqslant\theta<2\pi). \\ z=0 \end{cases}$

30. 在 xOy 面上为 $x^2+y^2\leqslant 1$，在 yOz 面上为 $\begin{cases} y^2+z^2\leqslant 2, \\ z-y^2\geqslant 0, \end{cases}$ 在 zOx 面上为 $\begin{cases} x^2+z^2\leqslant 2, \\ z-x^2\geqslant 0. \end{cases}$

31. $x-2y+z+2=0$.

32. $7x-6y-3z-4=0$.

33. $x+y-3z-4=0$.

34. (1) $y-2z=0$；(2) $y=4$；(3) $x-2z-4=0$；

35. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

36. (1) $\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{-3}$. (2) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{-7}$；(3) $\frac{x+\frac{4}{19}}{7}=\frac{y+\frac{6}{19}}{1}=\frac{z-\frac{29}{19}}{-8}$；

(4) $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$.

37. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{3}$，$\begin{cases} x=1-2t, \\ y=1+t, (-\infty<t<+\infty). \\ z=1+3t \end{cases}$

38. $7x-11y-9z-25=0$.

39. $\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

40. $\frac{13\sqrt{42}}{14}$.

41. $\begin{cases} x-4y+z=3, \\ 11x-3y-23z=-171. \end{cases}$

习题 B

1. $\frac{2\pi}{3}$.

2. 2.

3. 4.

4. $\boldsymbol{x}=-4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$.

5. 30.

6. 20.

7. $x=-20$，最小值为 $\arccos\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$.

8. (1) 母线为 zOx 面上的抛物线 $z=\frac{1}{2}x^2$,旋转轴为 z 轴;(2) 母线为 yOz 面上的椭圆 $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$,旋转轴为 y 轴;(3) 母线为 xOy 面上的双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$,旋转轴为 y 轴.

9. $x+2y+1=0$.

10. $\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$.

11. (1) $X^2+2Y^2+4Z^2=1$,椭球面;

(2) $X^2+3Y^2=Z$,椭圆抛物面;

(3) $6X^2-2Y^2=1$,双曲柱面.

附录

书中出现外国人名汉译

外文人名	汉语译名
Cauchy	柯西
Cayley	凯莱
Cramer	克拉默;克莱姆;克兰姆
Euclid	欧几里得
Frobenius	弗罗贝尼乌斯
Grassmann	格拉斯曼
Hamilton	哈密顿;哈密尔顿;哈米顿
Kronecker	克罗内克;克罗内克尔
Laplace	拉普拉斯
Leibniz	莱布尼茨
Peano	佩亚诺;皮亚诺
Schimidt	施密特
Schwarz	施瓦茨;许瓦兹;许瓦尔兹
Sylvester	西尔维斯特;西勒维斯特
Vandermonde	范德蒙德;范德蒙
Буняковский	布涅柯夫斯基

* 本表中的汉译名有同一人名多译情况,这些不同译法均出自国内有影响的数学书中,列于此仅供参考.